Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

4. Übungsblatt zu „Analysis III für Sek II“, WS 2002/03

Abgabetermin: Montag, 18.11.02, bis 12.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 16: Für ein kompaktes Intervall H in $\mathbb{R}$ bezeichne $\omega(H)$ das offene mittlere Drittel, und es sei $\gamma(H) := H \setminus \omega(H)$. Für eine disjunkte Vereinigung $A := \bigcup_j H_j$ von r kompakten Intervallen wird $\gamma(A) := \bigcup_j \gamma(H_j)$ gesetzt; dann ist $\gamma(A)$ disjunkte Vereinigung von $2r$ kompakten Intervallen. Es sei nun $C_0 := [0,1]$, und rekursiv wird $C_n := \gamma(C_{n-1})$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert. Der Durchschnitt $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}$ heißt *Cantor-Menge*. Zeigen Sie, daß die Cantor-Menge eine Nullmenge ist.

Aufgabe 17: Zeigen Sie, daß gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \sin^n x \, dx \;=\; 0$$

Aufgabe 18: Es sei $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^2} t(x,y)\, d^2(x,y) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} t(x,y)\, dy \right) dx$$

Aufgabe 19: Es sei $R \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck mit Seitenlängen a und b. Zeigen Sie, daß für die charakteristische Funktion χ_R gilt:

$$\chi_R \in \mathcal{L}^+(\mathbb{R}^2) \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{R}^2} \chi_R \, d^2(x,y) \;=\; a \cdot b$$

Aufgabe 20: Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Funktionenfolge $f_n(x) := n^\alpha x^n (1-x)$ auf $[0,1]$ gegeben. Wann gilt $\|f_n\|_{\sup} \to 0$, wann ist $(\|f_n\|_{\sup})$ beschränkt, und wann besitzt (f_n) eine $\mathcal{L}_1$-Majorante?