Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

6. Übungsblatt zu „Analysis III für Sek II“, WS 2002/03

Abgabetermin: Montag, 2.12.02, bis 12.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 26: Berechnen Sie das Volumen des dreidimensionalen Standardsimplexes

$$\Delta_3 \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ und } x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}\,.$$

Aufgabe 27: Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen über die angegebenen Mengen integrierbar sind.

a) $f(x, y) := \sin y\, e^{-xy}$ über $[0, \infty)^2$

b) $f(x, y) := \frac{1}{x+y}$ über $[0, 1]^2$

c) $f(x, y) := \frac{1}{x+y}$ über $[-1, 1]^2$

Aufgabe 28: Ein Torus $T_R(a) \subseteq \mathbb{R}^3$ entsteht durch Rotation einer Kreisscheibe

$$\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - a)^2 + z^2 \leq R^2\}$$

mit $0 < R \leq a$ um die z-Achse. Berechnen Sie das Volumen von $T_R(a)$.

Aufgabe 29: Berechnen Sie die Schwerpunkte der folgenden Mengen.

a) $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \text{ und } y \geq 0\}$ mit $a, b > 0$

b) $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \text{ und } z \geq 0\}$ mit $R, h > 0$

Aufgabe 30: Es sei $\Psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ durch $\Psi(u, v) := (u(1 - v), uv)^T$ definiert.

a) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante $J\Psi$ und zeigen Sie, daß Ψ ein Diffeomorphismus von $(0, 1)^2$ auf das Dreieck $T := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0 \text{ und } x + y < 1\}$ ist.

b) Für $p, q \in \mathbb{R}$ definiere $f : T \to \mathbb{R}$ durch $f(x, y) := x^{p-1} y^{q-1}(x + y)$. Zeigen Sie, daß f genau dann über T integrierbar ist, wenn $p > 0$ und $q > 0$ gilt.