Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

8. Übungsblatt zu „Analysis III für Sek II“, WS 2002/03

Abgabetermin: Montag, 16.12.02, bis 12.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 36: a) Es sei $F_\alpha(x) := x^\alpha \cos\frac{1}{x}$ für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $F_\alpha(0) := 0$. Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $F_\alpha \in \mathcal{AC}[0,1]$?

b) Es sei $F(x) := x^2 \cos\frac{1}{x^2}$ für alle $x \in (0,1]$ und $F(0) := 0$. Zeigen Sie, daß F auf $[0,1]$ differenzierbar ist, aber $F' \notin \mathcal{L}_1[0,1]$ gilt. In welchem Sinne gilt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

Aufgabe 37: Es seien $\gamma \in \mathcal{C}^1_{st}([a,b],\mathbb{R}^n)$ und $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$. Für welche linearen Transformationen $T \in GL(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\int_{T(\gamma)} \langle Tv(x), dx\rangle \;=\; \int_\gamma \langle v(x), dx\rangle\,?$$

Aufgabe 38: Beweisen Sie die Ungleichung

$$\left|\int_\gamma \langle v(x), dx\rangle\right| \;\leq\; \sup\{|v(x)| \mid x \in (\gamma)\} \cdot L(\gamma)$$

für Wege $\gamma \in \mathcal{C}^1_{st}([a,b],\mathbb{R}^n)$ und Vektorfelder $v \in \mathcal{C}((\gamma),\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 39: Eine *Lemniskate* Γ ist für $a > 0$ gegeben durch

$$\Gamma \;:=\; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ((x-a)^2+y^2)((x+a)^2+y^2) = a^4\}\,.$$

Berechnen Sie für $a := \frac{1}{2}\sqrt{2}$ den Flächeninhalt des Innengebietes G der Teilmenge $\Gamma_0 := \Gamma \cap ([0,\infty) \times \mathbb{R})$.

Aufgabe 40: Es sei $G \in \mathfrak{P}^1(\mathbb{R}^3)$ mit $\mu_2(\partial G) < \infty$. Eine Funktion $u \in \overline{\mathcal{C}}^2(G \times \mathbb{R})$ erfülle die *Wellengleichung*

$$\partial_t^2 u - c^2 \Delta_x u \;=\; 0 \quad \text{auf } G \times \mathbb{R}$$

für ein $c > 0$ und die *Dirichlet-Randbedingung*

$$u \;=\; 0 \quad \text{auf } \partial G \times \mathbb{R}\,.$$

Beweisen Sie den *Energieerhaltungssatz* $\frac{dE}{dt} = 0$ für

$$E(t) \;:=\; \int_G (\partial_t u(x,t)^2 + c^2|\mathrm{grad}_x u(x,t)|^2)\, d^3x\,.$$