Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

10. Übungsblatt zu „Analysis III für Sek II“, WS 2002/03

Abgabetermin: Montag, 13.1.03, bis 12.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 46: Es sei γ ein $\mathcal{C}^1_{st}$-Weg, dessen Spur die Lemniskate

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ((x-1)^2+y^2)((x+1)^2+y^2) = 1\}$$

ist. Berechnen Sie $\int_\gamma \frac{dz}{1-z^2}$.

Aufgabe 47: a) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein sternförmiges Gebiet, und $f \in \mathcal{O}(D)$ besitze keine Nullstellen. Konstruieren Sie ein $g \in \mathcal{O}(D)$ mit $e^g = f$.

b) Es sei $D \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ein sternförmiges Gebiet. Konstruieren Sie einen holomorphen *Zweig des Logarithmus* auf D, d.h. eine holomorphe Funktion $L : D \to \mathbb{C}$ mit $e^{L(z)} = z$ für alle $z \in D$.

Aufgabe 48: Für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ gebe es Zahlen $\omega, \omega' \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ mit $\frac{\omega'}{\omega} \notin \mathbb{R}$ und $f(z) = f(z+\omega) = f(z+\omega')$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß f konstant ist.

Aufgabe 49: a) Für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ gelte $\operatorname{Re} f(z) \leq C$ für ein $C \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß f konstant ist.

b) Für $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ gelte $|f(z)| \leq C(1+|z|)^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ und ein $C \geq 0$. Zeigen Sie, daß f ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist.

Aufgabe 50: a) Es seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $K \subseteq D$ kompakt und $\varepsilon > 0$ mit $K_\varepsilon \subseteq D$. Zeigen Sie, daß für $f \in \mathcal{O}(D)$ gilt:

$$\sup_{z\in K} |f(z)| \;\leq\; \frac{1}{\pi\varepsilon^2} \int_{K_\varepsilon} |f(\zeta)|\, dm_2(\zeta)$$

b) Folgern Sie, daß $\mathcal{O}(D) \cap L_1(D)$ in $L_1(D)$ abgeschlossen ist.