Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 21. Oktober 2002

# Analysis I

2. Übungsblatt, WS 2002/03

**Abgabe** bis Montag, 28. Oktober 2002, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

**Aufgabe 1** ⋆

a) Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Zeigen Sie, dass die Menge $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ nach oben beschränkt ist und dass gilt:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

b) Bestimmen Sie Supremum und Infimum von $\left\{ \frac{1}{x + \frac{1}{x}} + \frac{1}{y + \frac{1}{y}} : x > 0, y > 0 \right\}$.

**Aufgabe 2** ⋆

Zeigen Sie für $0 < x < 1$ und $n \in \mathbb{N}$ mit Induktion die Ungleichung:

$$(1 - x)^n \leq \frac{1}{1 + nx}$$

**Aufgabe 3**

Es sei $n$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie jeweils durch einen Widerspruchsbeweis:

a) Ist $n^3$ gerade, so auch $n$.

b) $\sqrt[3]{2}$ ist nicht rational.

**Aufgabe 4**

a) Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:
   1) Gilt $a < b + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, so folgt $a \leq b$.
      (Bleibt die Aussage richtig, wenn man $a \leq b$ durch $a < b$ ersetzt?)
   2) Gilt $|a - b| < \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$, so folgt $a = b$.

b) Beweisen Sie: Ist $A$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ und gibt es ein $M \in \mathbb{R}$, so daß $a < M + \varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $a \in A$ gilt, so ist $A$ nach oben beschränkt und es gilt $\sup A \leq M$.

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0203/index.php`