UNIVERSITÄT DORTMUND
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 28. Oktober 2002

Analysis I

3. Übungsblatt, WS 2002/03

Abgabe bis Montag, 4. November 2002, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie Real-, Imaginärteil und Betrag von folgenden komplexen Zahlen, sowie die zu ihnen konjugiert komplexe Zahl:

(i) $(1+2i)^2$ (ii) $\dfrac{8-i}{3+2i}$ (iii) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{10}$ (iv) $(1+i)^n$ $(n \in \mathbb{N})$

b) Bestimmen und skizzieren Sie jeweils die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit:

(i) $|z-2i| + |z+2i| \leq 16$ (ii) $\operatorname{Re} z^2 = 1$ (iii) $\operatorname{Im}((1-i)z) > 0$

Aufgabe 2 $\star$

Bestimmen Sie zu $\varepsilon = 1,\ 10^{-5},\ 10^{-10}$ je ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \varepsilon$ für $n \geq n_0$:

a) $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ b) $a_n = \dfrac{2n^2-n}{n^2+1} - 2$

Aufgabe 3 $\star$

Prüfen Sie jeweils, ob (a_n) konvergent ist, und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

a) $a_n = \dfrac{4n^2+2n-7}{n^2-3n+1}$ b) $a_n = \dfrac{n-1}{(-1)^n n + 2}$ c) $a_n = \sqrt[n]{n^2+3}$

d) $a_n = \sqrt{n^2+2n-1} - n$ e) $a_n = \dfrac{n}{2^n}(1+(-1)^n)$ f) $a_n = \dbinom{100n}{n^2}$

Aufgabe 4

In welchen der folgenden Fälle ist (a_n) eine Nullfolge? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

a) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| + |a_{n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

b) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n + a_{n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$.

c) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < 2\varepsilon^4$ für alle $n \geq 3n_0$.

Aufgabe 5

Beweisen Sie für $a_1, ..., a_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$: $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0203/index.php`