

## Analysis I

### 4. Übungsblatt, WS 2002/03

**Abgabe** bis Montag, 11. November 2002, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

#### Aufgabe 1 ★

Bestimmen Sie jeweils den Grenzwert der Folge  $(a_n)$  für:

- a)  $a_n = \frac{\sqrt{n^4 + 1} + 2n^2 - 3^n}{\sqrt[n]{n^2} - n^3 + 3^{n+1}}$       b)  $a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  für  $x = 2, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$
- c)  $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$  ( $a \geq b \geq c$ )      d)  $a_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$
- e)  $a_n = \frac{n^n}{3^n n!}$  (Monotoniesatz!)      f)  $a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$

#### Aufgabe 2 ★

Es seien  $a_1 := \frac{3}{2}$  und  $(a_n)$  rekursiv definiert durch  $a_{n+1} := a_n^2 - 2a_n + 2$ .

- a) Zeigen Sie  $1 \leq a_n \leq 2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- b) Beweisen Sie, dass  $(a_n)$  monoton fallend ist.
- c) Bestimmen Sie den Grenzwert von  $(a_n)$ .

#### Aufgabe 3

- a) Bestimmen Sie die Häufungspunkte von  $\frac{n^2 2^n + 3^{(-1)^n n}}{3^{n+1} + 6n}$ .
- b) Beweisen Sie:  $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$

#### Aufgabe 4

- a) Berechnen Sie die Werte der folgenden Reihen:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$       2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)}$

- b) Zeigen Sie, dass  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{4n^4 + n^2 + 1} - 2n^2\right)$  divergent ist.