Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 11. November 2002

Analysis I

5. Übungsblatt, WS 2002/03

Abgabe bis Montag, 18. November 2002, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 ⋆

Untersuchen Sie folgende Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a) $a_n = \dfrac{5n}{n^2+4}$ b) $a_n = \left(\sqrt[n]{4}-1\right)^n$ c) $a_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$

d) $a_n = \left(1+\dfrac{2}{n+1}\right)^{-n}$ e) $a_n = \sqrt{n^4+1}-n^2$ f) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie folgende Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

a) $a_n = \dfrac{nq^n}{n^3+1}$ $(q \in \mathbb{R})$ b) $a_n = (-1)^n \dfrac{2+(-1)^n}{n}$ c) $a_n = \dfrac{(-1)^{[\frac{n}{2}]}}{\sqrt{n}}$

d) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n-(-1)^n}$ e) $a_n = \dbinom{2n}{n} q^{-n}$ $(q \in \mathbb{R})$ f) $a_n = \dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$

Aufgabe 3 ⋆

a) Beweisen Sie: Ist (a_n) eine monoton wachsende und beschränkte Folge positiver Zahlen, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)$.

b) Sind folgende Aussagen richtig oder falsch? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergent

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ absolut konvergent

Aufgabe 4

Welche der folgenden Mehrfachreihen konvergieren?

a) $\displaystyle\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} 2^{-2n}3^{-k+1}$ b) $\displaystyle\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{(k^2+n^2)^{\frac{3}{2}}}$ c) $\displaystyle\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{1}{k^2+n^2}$

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0203/index.php`