UNIVERSITÄT DORTMUND
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 18. November 2002

Analysis I

6. Übungsblatt, WS 2002/03

Abgabe bis Montag, 25. November 2002, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 $\star$

Es sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Nutzen Sie im Folgenden das Cauchyprodukt.

a) Zeigen Sie $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n$ und bestimmen Sie damit explizit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nq^n$.

b) Berechnen Sie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n \sum\limits_{n=0}^{\infty} nq^n$ und explizit den Wert der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2q^n$.

Aufgabe 2

Welche der folgenden Grenzwerte existieren? Bestimmen Sie diese gegebenenfalls.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\right)\frac{1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1}-\sqrt{5x-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-1}{|x-1|}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \left[x + (x-[x])^2\right]$

Aufgabe 3 $\star$

Die Funktion $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ sei monoton wachsend. Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in (a,b)$ der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ existiert und dass gilt:

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (a,x_0)\}$$

Was läßt sich analog über $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ aussagen?

Bestimmen Sie in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ den rechts- und linkseitigen Grenzwert von $f(x) = [x]$.

Aufgabe 4 *(aus: 3. Übungsblatt zur Analysis I (WS 1976/77), Uni Karlsruhe (TH))*

Es seien $A_n, n \in \mathbb{N}$, nichtleere und nach oben beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Beweisen Sie für die Mengen $A := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $B := \{\sup A_n : n \in \mathbb{N}\}$ folgende Aussagen:

a) A ist genau dann nach oben beschränkt, wenn B nach oben beschränkt ist.

b) Falls A oder B nach oben beschränkt sind, gilt $\sup A = \sup B$.

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0203/index.php`