Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 25. November 2002

Analysis I

7. Übungsblatt, WS 2002/03

Abgabe bis Montag, 2. Dezember 2002, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit:

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & , \ x < 1 \\ x^2 + 2x - 3 & , \ x \geq 1 \end{cases}$ b) $g(x) = x\left[\frac{1}{x}\right], \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $h(x) = \left|\left[x + \frac{1}{2}\right] - x\right|, \quad x \in \mathbb{R}$ (Skizzieren Sie h.)

Lassen sich g bzw. die für $x > 0$ definierte Funktion $h\left(\frac{1}{x}\right)$ in 0 stetig fortsetzen?

Aufgabe 2 ⋆

Welche der folgenden Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ sind auf I gleichmäßig stetig?

a) $f(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad I = \mathbb{R}$ b) $f(x) = \dfrac{x^7 - x}{x^2 - 1}, \quad I = (-1, 1)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad I = (0, 1]$ d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad I = [1, \infty)$

Aufgabe 3 ⋆

a) Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Zeigen Sie, dass ein $\xi \in [0, \frac{9}{10}]$ existiert mit $f\left(\xi + \frac{1}{10}\right) - f(\xi) = \frac{1}{10}$.

b) Beweisen Sie, dass eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ konstant ist.

c) Zeigen Sie: Das Bild eines kompakten Intervalls $[a, b] \subset \mathbb{R}$ unter einer stetigen, nicht konstanten Funktion ist wieder ein kompaktes Intervall.

Aufgabe 4

Untersuchen Sie die Funktionenfolge (f_n) auf punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz in I. Bestimmen Sie die Grenzfunktion.

a) $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{x^{2n} + 1}, \quad I = \mathbb{R}$ b) $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1 + nx^3}, \quad I = [q, 1] \quad (0 \leq q < 1)$

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0203/index.php`