Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 2. Dezember 2002

Analysis I

8. Übungsblatt, WS 2002/03

Abgabe bis Montag, 9. Dezember 2002, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 ⋆

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen auf gleichmäßige Konvergenz in I:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{x^2+n}, \quad I = \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2}, \quad I = [q,\infty),\ (q>0)$

Aufgabe 2

Es seien f_n, f, g in $\mathbb{R}$ definierte Funktionen, und (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen f.
Zeigen Sie: Ist g beschränkt, so konvergiert $(f_n g)$ gleichmäßig gegen fg.
Bleibt die Aussage richtig, wenn man auf die Beschränktheit von g verzichtet?

Aufgabe 3 ⋆

Berechnen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{(3+2(-1)^n)n} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^{2n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{8^n+5} x^{3n+1}$

Aufgabe 4

Gegeben seien $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$ und $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

a) Bestimmen Sie die ersten 4 Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{f}$.

b) Bestimmen Sie die ersten 3 Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung von $f \circ g$.

Aufgabe 5

Es seien $a_0 = 1, a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 4a_{n-1}$ und $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius r.

a) Zeigen Sie $0 < a_n \le 4^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

b) Berechnen Sie f explizit im Intervall $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

c) Finden Sie eine bessere Abschätzung als $r \ge \frac{1}{4}$.

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0203/index.php`