Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 16. Dezember 2002

Analysis I

10. Übungsblatt, WS 2002/03

Abgabe bis Montag, 6. Januar 2003, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie jeweils alle Punkte aus $\mathbb{R}$, in denen f differenzierbar ist, und bestimmen Sie ggf. die Ableitung.

a) $f(x) = x^x \quad (x > 0)$

b) $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 1}{1 + |x|}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad (n = 1, 2)$

d) $f(x) = \begin{cases} x^4 & , x \in \mathbb{Q} \\ -x^4 & , x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Aufgabe 2 $\star$

Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{e^{2x-1} - e^x}{\sin \pi x}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2(1 - \cos x)\sin x - x^3}{(e^{x^2} - 1)^2 \sinh x}$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 3x}{1 - \cosh 2x}$

d) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x}$

Aufgabe 3

Zeigen Sie jeweils, dass f eine auf I definierte, differenzierbare Umkehrfunktion besitzt und berechnen Sie $(f^{-1})'(y_0)$.

a) $f(x) = x^3 + e^{2x}$, $I = \mathbb{R}$, $y_0 = 8 + e^4$

b) $f(x) = \cosh x$, $y_0 \in I = [1, \infty]$

Aufgabe 4 $\star$

Es sei f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie:

a) Zwischen zwei Nullstellen von f liegt eine Nullstelle von f'.

b) Ist $f \in C^n(\mathbb{R})$ und hat $f^{(n)}$ höchstens k Nullstellen, so hat f höchstens $k + n$ Nullstellen.

c) Die Gleichung $2^x = 1 + x^2$ hat genau 3 Lösungen.

Wir wünschen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins Jahr

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{10n - 1}{n + 5} \cdot \frac{400n^2 + n}{1 + 2n^2} + \frac{6n^3 - (-1)^n}{3 + 2n^3} \right) \quad \textbf{!}$$