Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 18. Dezember 2002

Wiederholungsaufgaben zur Analysis I

WS 2002/03

Keine Abgabe!

Aufgabe 1

Die Folge (a_n) sei durch $a_1 = a_2 = 1$ und $a_{n+2} = \frac{1}{6} a_n a_{n+1} + \frac{3}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert.

a) Zeigen Sie $1 \leq a_n \leq 3$ für $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend ist.

c) Begründen Sie die Konvergenz von (a_n) und berechnen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n!)^2}{(2n)!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$

Aufgabe 3

a) Gegeben seien $f_n, f : I \to J$ und $g : J \to \mathbb{R}$. (f_n) konvergiere gleichmäßig in I gegen f und g sei gleichmäßig stetig in J.
Zeigen Sie: $(g \circ f_n)$ konvergiert gleichmäßig gegen $g \circ f$.

b) Beweisen Sie die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge (h_n) auf $\mathbb{R}$:

$$h_n(x) = \sqrt{1 + \sin\left(\frac{1}{x^{2n} + n}\right)}$$

Aufgabe 4

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\sqrt{n} - 1} - \sqrt[4]{n}\right)$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2003}{n\sqrt[3]{n}}\right)^n$ c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{2x} + x^3 - x}{e^x \sinh x}$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{2n} x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 4^{(2+(-1)^n)n} x^{3n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sinh n \, x^{2n+1}$

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0203/index.php`