Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 6. Januar 2003

Analysis I

11. Übungsblatt, WS 2002/03

Abgabe bis Montag, 13. Januar 2003, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Berechnen Sie für $x \in (-1, 1)$ die Ableitung von $\arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ und zeigen Sie damit:

$$\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aufgabe 2 ⋆

a) Zeigen Sie $\dfrac{d}{dx} \tan x = 1 + (\tan x)^2$ für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Leiten Sie unter Zuhilfenahme des Ergebnisses in a) für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung $\tan x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^{2n+1}$ folgende Rekursionsformel her:

$$c_0 = 1, \quad (2n+3)c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k} \ (n \geq 0)$$

Warum kann man von einem ungeraden Potenzreihenansatz ausgehen?

c) Berechnen Sie die ersten 5 Koeffizienten.

Aufgabe 3

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\log(x^2) - 2x + 2}{x^2 - 2x + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\sinh x} \right)$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Aufgabe 4 ⋆

Beweisen Sie mit dem Mittelwertsatz folgende Aussagen:

a) $\tan x > x$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$

b) $\log(1+x) \geq \dfrac{x}{x+1}$ für $x > -1$

c) $\dfrac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x$ für $x \geq 0$

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0203/index.php