UNIVERSITÄT DORTMUND
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 20. Januar 2003

Analysis I

13. Übungsblatt, WS 2002/03

Abgabe bis Montag, 27. Januar 2003, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 $\star$

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ um $x_0 = 8$.

b) Finden Sie für $\sin 1$ eine Näherung ζ mit $|\zeta - \sin 1| < \frac{1}{100}$.

c) Bestimmen Sie $T_2(x,0)$ von $f(x) = \log(3 + \cos(x))$ und zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - T_2(x,0)| < \frac{5}{24}|x|^3$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\log x^2) & , \text{ für } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ für } x = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4 $\star$

Die Funktion f sei in $I = (-1, 1)$ beliebig oft differenzierbar und es sei

$$M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{x \in I} \left| f^{(n)}(x) \right|$$

endlich. Zeigen Sie, dass f durch seine Taylorreihe um $x_0 = 0$ dargestellt wird. Berechnen Sie deren Konvergenzradius.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Mengen N sind Nullmengen in $\mathbb{R}$?

a) $N = \{x \in [0,1] : x$ läßt sich im Dezimalsystem ohne die Ziffer 8 schreiben$\}$

b) $N = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0203/index.php`