UNIVERSITÄT DORTMUND
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 3. Februar 2003

Analysis I

15. Übungsblatt, WS 2002/03

Abgabe bis Montag, 10. Februar 2003, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1

Es sei (x_n) eine Folge im Intervall $I = [0,1]$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe. Es seien Funktionen $\Phi_n : I \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} a_n & , \text{ für } 0 \leq x \leq x_n \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie für die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x)$ folgende Aussagen:

a) f ist in $I \setminus \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ stetig.

b) f ist über I Riemann-integrierbar. Berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Aufgabe 2 ⋆

Welche der folgenden Funktionen sind stetig differenzierbar?

a) $F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} e^{-xt}\,dt, \quad x > 0$

b) $G(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cos xt\,dt, \quad x \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3

Die Funktionenfolgen (f_n), (g_n) konvergieren punktweise in dem jeweiligen Intervall I. Zeigen Sie, dass die Konvergenz majorisiert ist.

a) $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \sqrt{1-x}, \quad I = (0,1)$

b) $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k^3 x^{\frac{3}{2}}}, \quad I = (0,\infty)$

Aufgabe 4 ⋆

Zeigen Sie die Existenz folgender Integrale:

a) $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$

b) $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$

c) $\int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ws0203/index.php`