Lineare Algebra I
Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (P): (To prove or not to prove, that is the question.)
Seien L, M, N Mengen und $f : L \to M$ sowie $g : M \to N$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. (Dies bedeutet, dass Sie jeweils entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel angeben müssen.)

a) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

c) Genau dann sind f und g injektiv, wenn $g \circ f$ injektiv ist.

d) Genau dann sind f und g surjektiv, wenn $g \circ f$ surjektiv ist.

Aufgabe 2 (P): (Links, rechts, vor, zurück, das macht Spaß, das bringt Glück!)
Seien M, N zwei Mengen und sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

a) Sei $T \subseteq N$ eine Teilmenge. Gilt stets $f(f^{-1}(T)) \subseteq T$?
Unter welcher Bedingung gilt hier Gleichheit?

b) Gilt $f^{-1}(f(a)) = \{a\}$ für alle $a \in M$? Wenn nicht, unter welcher Bedingung gilt dies?

Aufgabe 3 (D+L): (Und jetzt Abb ins Wochenende ...)
Sei M eine Menge, und sei $\mathrm{Abb}(M, M)$ die Menge aller Abbildungen $f : M \to M$.

a) Zeigen Sie, dass das Monoid $(\mathrm{Abb}(M, M), \circ)$ im Allgemeinen keine Gruppe ist. Welche Elemente besitzen ein inverses Element?

b) Beweisen Sie, dass dieses Monoid im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

c) Ist f ein Element dieses Monoids, so heißt g ein <u>Rechtsinverses</u> von f, wenn $f \circ g = id_M$ gilt, und h heißt ein <u>Linksinverses</u> von f, wenn $h \circ f = id_M$ gilt.

Zeigen Sie, dass $f \in \mathrm{Abb}(M, M)$ genau dann ein Rechtsinverses besitzt, wenn f surjektiv ist, und dass f genau dann ein Linksinverses besitzt, wenn f injektiv ist.

Aufgabe 4 (D+L): "Komm, wir gehen in den Wald und machen a hoch minus 1." "Mensch, bist Du invers!"
Sei $(G, \star)$ eine Gruppe. Für alle $a \in G$ gelte $a \star a = e$. Beweisen Sie, dass G abelsch ist.

Aufgabe 5 (L): (Wirrjektiv und Sturjektiv)
Vergleichen Sie die Begriffe "Bild" und "Urbild" sowie die Begriffe "injektiv" und "surjektiv", indem Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede angeben.

Aufgabe 6 (D): (Ich verstehe nur noch Bahnhof!)
Von 280 Studenten einer Vorlesung sprechen 260 Deutsch, 234 Englisch und 122 Französisch. Dabei sind 214 Studenten, die Deutsch und Englisch sprechen, 107 Studenten, die Deutsch und Französisch sprechen sowie 90 Studenten, die Englisch und Französisch sprechen.

a) Veranschaulichen Sie die Situation durch ein Mengendiagramm.

b) Stellen Sie eine Formel für die Anzahl der Elemente des Durchschnitts auf.

c) Wie viele Studenten sprechen alle drei Sprachen?

Aufgabe 7 ($\star$): (Ungerade, gerade, ungerade, gerade, ...)
Gegeben sei die Menge $M = \{1, \ldots, n\}$. Eine Teilmenge $T \subseteq M$ heißt alternierend, wenn ihr kleinstes Element ungerade ist, das zweitkleinste ist gerade, das drittkleinste ist ungerade u.s.w. Die leere Teilmenge ist definitionsgemäß alternierend. Wie viele alternierende Teilmengen besitzt M?

Tipp: Nennen Sie die gesuchte Zahl f_n. Berechnen Sie f_1, f_2, f_3, f_4. Unterscheiden Sie die Fälle $n \notin T$ und $n \in T$. Im letzteren Fall definieren Sie eine geeignete bijektive Abbildung.