Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: 08.11.2002, 9.00 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 3

Aufgabe 1 (P): (Es macht Spaß, in Vierergruppen zu tafeln.)
Bestimmen Sie mit Hilfe der Gruppentafeln (bis auf Isomorphie) alle Gruppen mit vier Elementen. Welche davon sind abelsch?

Aufgabe 2 (P): (Gruppenhomomorphismus: die irrationale Angst davor, sich in ein Groupie zu verwandeln.)
Seien G, H Gruppen und sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}(f) = f^{-1}(e_H)$ eine Untergruppe von G ist. Sie heißt der **Kern** von f.

b) Beweisen Sie, dass $\mathrm{Bild}(f)$ eine Untergruppe von H ist.

c) Sei $U = \mathrm{Kern}(f)$. Zeigen Sie, dass für ein Element $a \in G$ mit inversem Element $\widetilde{a} \in G$ gilt $aU\widetilde{a} = U$.

Aufgabe 3 (P): (Die S_3 ist *keine* 6–Gruppe)

a) Geben Sie die Elemente der Gruppe S_3 explizit an.

b) Stellen Sie die Gruppentafel von S_3 auf.

c) Bestimmen Sie alle Untergruppen von S_3.

Aufgabe 4 (D+L): (Mathe–Probleme? Rufen Sie $0190/(q^r - 1$ mod $p)$ an!)

a) Sei $n \in \mathbb{N}_+$. Zeigen Sie, dass die Menge der Restklassen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\backslash\{0 + n\mathbb{Z}\}$ durch die Definition $(a + n\mathbb{Z}) \cdot (b + n\mathbb{Z}) = ab + n\mathbb{Z}$ zu einem kommutativen Monoid wird.

b) Sei nun $n = p$ eine Primzahl. Beweisen Sie, dass es für jede Zahl $q \in \mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z}$ ein $r \geq 0$ gibt mit
$$q^r \equiv 1 \pmod{p}.$$
Tipp: Betrachten Sie $q(\mathrm{mod}\ p)$, $q^2(\mathrm{mod}\ p)$, $q^3(\mathrm{mod}\ p)$ u.s.w.

c) Folgern Sie aus b), dass $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\backslash\{0 + p\mathbb{Z}\}, \cdot)$ eine Gruppe ist.

Aufgabe 5 (D): ("Permute–O–Man?"
"Yes, I bring with me the power of permutation.")
In der Gruppe S_5 sei die Permutation $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ gegeben.

a) Schreiben Sie σ als Produkt von Transpositionen.

b) Schreiben Sie σ als Produkt von Nachbartranspositionen.

c) Wie viele Fehlstände besitzt σ? Ist σ gerade oder ungerade?

Tipp: `http://www.c3.lanl.gov/mega-math/permuto.html`

Aufgabe 6 ($\star$): (Keyboard not found. Press F1 to continue.)
Ist a ein Element einer Gruppe G, so heißt die Zahl $\mathrm{ord}_G(a) = \min\{i \in \mathbb{N} \mid a^i = e\}$ die **Ordnung** von a in G. Hierbei ist $a^i = \underbrace{a \circ a \circ \cdots \circ a}_{i\text{–mal.}}$

Im Folgenden wollen wir die Ordnungen der Elemente der Gruppe S_n studieren. Dazu repräsentieren wir eine Permutation $\sigma \in S_n$ durch die Liste $L = [\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)]$.

a) Schreiben Sie im Maple–Programm `Potenz` (L, i), das für $i \geq 0$ die der Potenz σ^i entsprechende Liste berechnet.

   Tipp: Die Länge von L können Sie mit `nops` (L) abfragen.

b) Implementieren Sie eine Maple–Funktion `Ordnung` (L), die die Ordnung $\mathrm{ord}_{S_n}(\sigma)$ berechnet.

c) Für $n = 1, 2, \ldots, 5$ berechnen Sie die Liste der Ordnungen der Elemente von S_n, indem Sie eine geeignete Maple–Funktion `Alle Ordnungen` (n) schreiben und anwenden.

   Tipp: Die Elemente von S_n können Sie mit dem Befehl `permute` $(\ldots)$ im Paket `combinat` erzeugen.

d) Schreiben Sie schließlich eine Maple–Prozedur `OrdZahlen` (n), die eine Liste berechnet, die angibt wie viele Elemente von S_n die Ordnungen $1, 2, 3, \ldots, n$ haben.