Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: Freitag, 24.01.2003, 9.00 Uhr

Lineare Algebra I

Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (P):
(O.B.d.A. = Ohne Berücksichtigung der Anfängerstudenten)
Sei $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ die $\mathbb{Q}$–lineare Abbildung mit

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } f(e_3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine $\mathbb{Q}$–lineare Abbildung $g : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ an, so dass $f \circ g$ den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ abbildet.

b) Geben Sie eine $\mathbb{Q}$–lineare Abbildung $h : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$ an, so dass $h \circ f$ den Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ abbildet.

Aufgabe 2 (P): (InVerse Links)
Sei K ein Körper und $\mathcal{M} \in \mathrm{Mat}_{m,n}(K)$. Eine Matrix $\mathcal{L} \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$ heißt **Linksinverse** zu $\mathcal{M}$, wenn $\mathcal{L} \cdot \mathcal{M} = \mathcal{I}_n$ gilt. Eine Matrix $\mathcal{R} \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$ heißt **Rechtsinverse** zu $\mathcal{M}$, wenn $\mathcal{M} \cdot \mathcal{R} = \mathcal{I}_m$ gilt. Ferner sei $f : K^n \to K^m$ die K–lineare Abbildung mit Matrix $\mathcal{M}$.

a) Genau dann besitzt $\mathcal{M}$ eine Linksinverse, wenn f injektiv ist.
b) Genau dann besitzt $\mathcal{M}$ eine Rechtsinverse, wenn f surjektiv ist.

Aufgabe 3 (D+L): (Was ist die Matrix?)
Sei K ein Körper und $\mathcal{M} \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Zeigen Sie, dass es ein $N > 0$ gibt mit $\mathrm{Rang}(\mathcal{M}^i) = \mathrm{Rang}(\mathcal{M}^{i+1})$ für alle $i \geq N$.

Aufgabe 4 (D+L): (Im Bild: F. Kern auf Rang 2!)
Sei K ein Körper, sei V ein endlich–dimensionaler K–Vektorraum, und sei $f : V \to V$ eine K–lineare Abbildung. Beweisen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

a) $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)$.
b) $f^2 = 0$ und $\dim_K(V) = 2 \cdot \mathrm{Rang}(f)$.

Aufgabe 5 ($\star$): (Calculus Interruptus)
Finden Sie den Rang der folgenden Matrix **per Hand**, also ohne die Verwendung eines Taschenrechners oder Computers.

$$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} 54401 & 57668 & 15982 & 103790 \\ 33223 & 26563 & 23165 & 71489 \\ 36799 & 37189 & 16596 & 46152 \\ 21689 & 55538 & 79922 & 51237 \end{pmatrix}$$