Prof. Dr. M. Kreuzer Abgabetermin: Freitag, 07.02.2003, 9.00 Uhr

Lineare Algebra I
Übungsblatt 14

Aufgabe 1 (P): (Zeilenoperation = Korrektur eines Rechtschreibfehlers; Spaltenoperation = ???)
Sei K ein Körper und $\mathcal{M} \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

a) Zeigen Sie, dass sich $\det(\mathcal{M})$ nicht ändert, wenn man in $\mathcal{M}$ ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert.

b) Zeigen Sie, dass sich $\det(\mathcal{M})$ nicht ändert, wenn man in $\mathcal{M}$ ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen Spalte addiert.

Aufgabe 2 (P):
(Liebe ist die stärkste Determinante des menschlichen Schicksals.)
Sei K ein Körper und $\mathcal{M} \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Beweisen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

a) Es gilt $\det(\mathcal{M}) \neq 0$.

b) Die Matrix $\mathcal{M}$ ist eine Einheit im Ring $\mathrm{Mat}_n(K)$.

c) Die Zeilen von $\mathcal{M}$ sind K–linear unabhängig.

d) Die Spalten von $\mathcal{M}$ sind K–linear unabhängig.

e) Es gilt $\mathrm{Rang}(\mathcal{M}) = n$.

Aufgabe 3 (D+L): (Die Matrix ist überall.)
Sei K ein Körper und $\mathcal{M} \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die Matrix:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\det(\mathcal{M})$.

Aufgabe 4 (L): (Eine Determinante aus dem Weltall!)
Seien a, b, c, d paarweise verschiedene Elemente eines Körpers K. Berechnen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$$

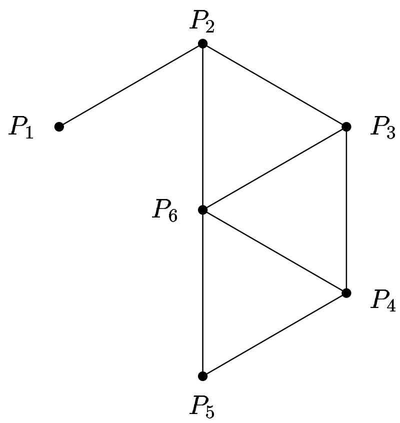
Aufgabe 5 (D): (The termination of the determination of this determinant is indeterminate!)
Seien $a_1, \dots, a_n$ Elemente eines Körpers K. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion nach n die Formel:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Aufgabe 6 ($\star$): (Der Letzte knipst das Licht aus!)
In einem Stromnetz befinden sich n Lampen und bei jeder Lampe ein Schalter. Es werde repräsentiert durch einen Graphen mit Ecken $P_1, \dots, P_n$ (die für die Lampen/Schalterpaare stehen) und einigen Kanten $\overline{P_i P_j}$ (die für die Verbindungsleitungen stehen). Wird ein Schalter betätigt, so ändert die anliegende Lampe sowie jede durch eine direkte Verbindungsleitung angeschlossene Lampe ihren Ein/Auszustand.

a) Zeichnen Sie einen Graphen, der folgende Situation beschreibt: Es gibt 5 Lampen/Schalterpaare $P_1, \dots, P_5$. Wird Schalter P_1 betätigt, so ändern sich die Zustände aller Lampen außer P_4. Wird P_2 betätigt, so ändern sich die Zustände aller Lampen außer P_5. Wird P_4 betätigt, so ändern sich die Lampenzustände bei P_2, P_4, P_5 und wird P_5 betätigt, so ändern sich die Lampenzustände bei P_1, P_4, P_5. Wird schließlich P_3 betätigt, so ändern sich die Lampenzustände bei P_1, P_2, P_3.

b) In dem Stromnetz:



seien die Lampen bei P_1, P_2 an und die anderen aus. Wie kann man alle Lampen einschalten? Wie kann man sie alle ausschalten? Was passiert, wenn man erst den Schalter P_3 und dann P_6 betätigt?

c) Zu jedem Stromnetz mit Lampen/Schalterpaaren $P_1, \dots, P_n$ definieren wir nun eine Matrix $\mathcal{M} = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_2)$. Dabei gelte

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \overline{P_i P_j} \text{ eine Leitung ist oder } i = j \text{ gilt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Geben Sie die Matrizen zu den Stromnetzen in a) und b) an.

d) Ein Spaltenvektor $v \in \mathbb{F}_2^n$ gebe die betätigten Schalter an. Erklären Sie, was $\mathcal{M} \cdot v$ über den Zustand der Lampen nach dieser Operation aussagt.

Aufgabe 7 ($\star$):
(Der Herr sprach: "Es werde Licht!" Und es ward Licht.)

a) In der Situation von Aufgabe 6, betrachten Sie das durch die Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegebene Stromnetz. Zeichnen Sie den zugehörigen Graphen.

b) Im Stromnetz aus a) sollen alle Lampen dunkel sein. Durch welche Schalteroperation erreicht man den Zustand P_2, P_3, P_4 ein und P_1 aus? Lösen Sie diese Aufgabe nicht nur anhand des gezeichneten Graphen, sondern auch mittels eines geeigneten LGS über $\mathbb{F}_2$.

c) Wiederholen Sie a) und b) für die Matrix

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie unterscheiden sich die beiden Graphen? Was ist der wesentliche Unterschied der beiden Matrizen?

d) Sei nun ein beliebiges Stromnetz mit einem beliebigen Lampenzustand gegeben. Beweisen Sie, dass man genau dann stets alle Lampen einschalten kann, wenn die Determinante der zugehörigen Matrix ungleich Null ist.