Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

1. Übungsblatt zu „Analysis II für Sek II“, SS 2003

Abgabetermin: Montag, 5.5.03, bis 14.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 1: Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}$ **b)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^k}{k^{k+1}}$ **c)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ **d)** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^3}$ **e)** $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\log k}$ **f)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$

Aufgabe 2: Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Reihen konvergieren.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(1+x^2)^{k+1}}$ **b)** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{1+x^{4k}}$

Aufgabe 3: Berechnen Sie $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$ für die Folge (a_n) definiert durch

$$a_n \ := \ \frac{n+(-1)^n(2n+1)}{n} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 4: Es seien $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkte Folgen. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\limsup(a_n + b_n) \ \leq \ \limsup a_n + \limsup b_n$$

Geben Sie ein Beispiel an, wo tatsächlich „<“ auftritt.

Aufgabe 5: Es sei (a_k) eine Folge positiver reeller Zahlen, und $\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$ sei eine beschränkte Folge. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\liminf \frac{a_{k+1}}{a_k} \ \leq \ \liminf \sqrt[k]{a_k} \ \leq \ \limsup \sqrt[k]{a_k} \ \leq \ \limsup \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Was folgt für den Anwendungsbereich von Wurzel- und Quotientenkriterium?