Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

3. Übungsblatt zu „Analysis II für Sek II“, SS 2003

Abgabetermin: Montag, 19.5.03, bis 14.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 11: Es sei $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, daß $f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

b) Zeigen Sie, daß f die folgende Funktionalgleichung erfüllt:

$$f(x+y) \;=\; f(x) \cdot f(y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 12: Untersuchen Sie die Funktionenfolgen

a) $\left(\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}\right)$ auf $\mathbb{R}$ **b)** $\left(\frac{n(x-x^2)-1}{nx+1}\right)$ auf $[0,1]$ **c)** $(nx(1-x^2)^n)$ auf $[-1,1]$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

Aufgabe 13: Zeigen Sie, daß die folgenden Funktionenfolgen auf allen kompakten Teilintervallen der angegebenen Intervalle gleichmäßig konvergieren, und untersuchen Sie, ob die Konvergenz auf den angegebenen Intervallen selbst gleichmäßig ist.

a) $(\sqrt[n]{x})$ auf $(0,\infty)$ **b)** $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} x^k\right)$ auf $(-1,1)$ **c)** $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} x^k(1-x)^k\right)$ auf $(0,1)$

Aufgabe 14: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $(f_n) \subseteq \mathcal{C}(I)$, $f \in \mathcal{C}(I)$. Zeigen Sie, daß für die Aussagen

(A) (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f

(B) Für jede Folge $(x_n) \subseteq I$ und $x \in I$ gilt: $x_n \to x \;\Rightarrow\; f_n(x_n) \to f(x)$

die Implikation „$(A) \Rightarrow (B)$“ gilt und für kompakte Intervalle I auch die Umkehrung.

Aufgabe 15: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Ist f beschränkt, so ist auch $\frac{1}{f}$ beschränkt.

b) Ist f stetig, so ist auch $\frac{1}{f}$ stetig.

c) Ist f stetig differenzierbar, so ist auch $\frac{1}{f}$ stetig differenzierbar.

d) Ist f ein Polynom, so ist auch $\frac{1}{f}$ ein Polynom.