Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

4. Übungsblatt zu „Analysis II für Sek II“, SS 2003

Abgabetermin: Montag, 26.5.03, bis 14.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 16: a) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ für $\alpha > 1$ auf $\mathbb{R}$ normal konvergiert.

b) Es sei $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ und $m \in \mathbb{N}$. Für welche α gilt $f \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R})$?

Aufgabe 17: a) Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ auf jedem Intervall $[c, \infty)$ mit $c > 1$ normal konvergent ist.

b) Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ auf $(1, \infty)$ gleichmäßig konvergiert.

c) Zeigen Sie, daß die Funktion $\zeta : x \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ in $\mathcal{C}^\infty(1, \infty)$ liegt.

Aufgabe 18: Bestimmen Sie für folgende Potenzreihen $\sum_{k\geq 0} a_k(x-a)^k$ den Konvergenzradius.

a) $a_k = k^5 \log(k+1) + k^2$ **b)** $a_k = \dfrac{k^3 \sin k}{1,7^k}$ **c)** $a_k = 3^{\frac{k}{2}} e^{-k}$

Aufgabe 19: Die Reihe $\sum_{k\geq 0} a_k(x-a)^k$ habe Konvergenzradius $\rho = 2$. Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender Reihen, wobei $m \in \mathbb{N}$ sei.

a) $\sum_{k\geq 0} a_k^m (x-a)^k$ **b)** $\sum_{k\geq 0} a_k (x-a)^{mk}$ **c)** $\sum_{k\geq 0} a_k (x-a)^{k^2}$

Aufgabe 20: Es seien $(c_n) \subseteq \mathbb{R}$ und $(d_n) \subseteq (0,1)$ Folgen mit $d_n \to 0$ für $n \to \infty$. Definiere die Funktionenfolge $(t_n(x)) \subseteq \mathcal{C}[0,1]$ für alle $x \in [0,1]$ durch:

$$t_n(x) := \begin{cases} 3c_n \frac{x}{d_n} & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{d_n}{3} \\ c_n & \text{für } \frac{d_n}{3} \leq x \leq \frac{2d_n}{3} \\ 3c_n \left(1 - \frac{x}{d_n}\right) & \text{für } \frac{2d_n}{3} \leq x \leq d_n \\ 0 & \text{für } d_n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Wann gilt $t_n \to 0$ punktweise?

b) Wann gilt $t_n \to 0$ gleichmäßig?

c) Wann gilt $\int_0^1 t_n(x)\, dx \to 0$?

Übungszettel und Musterlösungen gibt es ab sofort im Internet über die Homepage der Fachschaft Mathematik und über die folgende Adresse:

http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsv/ss03/ana/ana_uebung.html