

7. Übungsblatt zu „Analysis II für Sek II“, SS 2003

Abgabetermin: Montag, 16.6.03, bis 14.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 30: Untersuchen Sie die folgenden auf \mathbb{R}^2 definierten Funktionen auf Stetigkeit.

$$\text{a) } f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{b) } g(x, y) := x \cdot f(x, y)$$

$$\text{c) } h(x, y) := \text{sign}(x + y) \cdot \sin(x^2 + y^2)$$

Aufgabe 31: Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

partiell stetig und sogar auf jeder Geraden durch den Nullpunkt stetig ist. Ist f im Nullpunkt stetig?

Aufgabe 32: Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^1(I, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, daß die Funktion $\tilde{\Delta}f : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{\Delta}f(x, y) := \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{falls } y \neq x \\ f'(x) & \text{falls } y = x \end{cases}$$

stetig ist. (Hinweis: Mittelwertsatz)

Aufgabe 33: Bestimmen Sie jeweils \overline{M} , M° und ∂M für folgende Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^2$.

$$\text{a) } M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$$

$$\text{b) } M := \left\{ \left(x, \cos \frac{1}{x} \right) \mid 0 < x \leq \frac{1}{\pi} \right\}$$

$$\text{c) } M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 4\}$$

$$\text{d) } M := \mathbb{Q}^2$$