Prof. Dr. W. Kaballo
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

9. Übungsblatt zu „Analysis II für Sek II“, SS 2003

Abgabetermin: Montag, 30.6.03, bis 14.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 38: Es sei $M := \{(x,y) \mid xy > 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Distanz des Nullpunktes zu M.

Aufgabe 39: Es seien X ein metrischer Raum, $(a_n) \subseteq X$ eine Folge und $M = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie, daß jeder Häufungspunkt von M ein Häufungswert von (a_n) ist. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

Aufgabe 40: Es seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, daß f genau dann gleichmäßig stetig ist, falls für zwei Folgen $(x_n), (y_n) \subseteq X$ stets gilt: $d(x_n, y_n) \to 0 \;\Rightarrow\; d(f(x_n), f(y_n)) \to 0$

Aufgabe 41: Im folgenden bezeichne $\mathbb{Q}[x]$ die Polynome in x mit rationalen Koeffizienten und $\mathbb{Q}_m[x] \subseteq \mathbb{Q}[x]$ die Polynome vom Grad $\leq m$ für $m \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}_m[x]$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ abzählbar ist.

b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}[x]$ abzählbar ist.

c) Eine Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt *algebraisch*, wenn es ein Polynom $P \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad $m \geq 1$ gibt, so daß $P(\alpha) = 0$ gilt. Zeigen Sie, daß die Menge $\mathbb{A}$ der algebraischen Zahlen abzählbar ist.
(Hinweis: Ist $P \in \mathbb{Q}[x]$, so existiert ein Surjektion ν_P von $\mathbb{N}$ auf die Menge der Nullstellen von P. Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{Q}[x] \times \mathbb{N} \to \mathbb{A}$ definiert durch $f(P,n) := \nu_P(n)$.)