

12. Übungsblatt zu „Analysis II für Sek II“, SS 2003

Abgabetermin: Montag, 21.7.03, bis 14.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 50: Finden Sie alle Lösungen der folgenden Gleichungen.

a) $z^6 = 1 + i$ b) $z^3 - 34z + 12 = 0$ c) $z^4 - z^2 - 20 = 0$

Aufgabe 51: Es sei

$$A := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n A^i$, und untersuchen Sie, ob $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$ existiert.

Aufgabe 52: Es sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y . Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen für Teilmengen $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$.

- a) A offen $\Rightarrow f(A)$ offen
- b) B offen $\Rightarrow f^{-1}(B)$ offen
- c) A abgeschlossen $\Rightarrow f(A)$ abgeschlossen
- d) B abgeschlossen $\Rightarrow f^{-1}(B)$ abgeschlossen
- e) A kompakt $\Rightarrow f(A)$ kompakt
- f) B kompakt $\Rightarrow f^{-1}(B)$ kompakt
- g) A wegzusammenhängend $\Rightarrow f(A)$ wegzusammenhängend
- h) B wegzusammenhängend $\Rightarrow f^{-1}(B)$ wegzusammenhängend

Aufgabe 53: Zur Zeit $t = 0$ seien die Kreislinie $S_0 := S_1(0, 1)$, der Kreismittelpunkt $M(0) := (0, 1)$ und der Randpunkt $R(0) := (0, 0)$ gegeben. Rollt die Kreislinie nun über die x -Achse (mit Geschwindigkeit 1), so hat man zur Zeit $t \in \mathbb{R}$ entsprechende Mittelpunkte $M(t)$ und Randpunkte $R(t)$. Für festes $b > 0$ sei $\gamma_b(t) := M(t) + b(R(t) - M(t))$; γ_b beschreibt dann eine *Zykloide*.

- a) Beweisen Sie die Formel $\gamma_b(t) = (t - b \sin t, 1 - b \cos t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- b) Berechnen Sie die Weglänge von γ_1 zwischen 0 und 2π .