

13. Übungsblatt zu „Analysis II für Sek II“, SS 2003

Abgabetermin: Montag, 28.7.03, bis 14.00 Uhr in den Kästen

Aufgabe 54: Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein *Zeitintervall* und $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ein *Raumgebiet*; Punkte aus $D \times I \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ werden mit (x, t) bezeichnet, und es sei $r = |x|$. Die partielle Differentialgleichung

$$\Delta_x f - \frac{1}{k} \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

heißt *Wärmeleitungsgleichung* ($k > 0$ ist die Temperaturleitfähigkeit). Zeigen Sie, daß

$$T(x, t) := t^{-n/2} \exp\left(-\frac{r^2}{4kt}\right)$$

eine bezüglich der Raumvariablen rotationssymmetrische Lösung auf $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ ist. Was passiert für $t \rightarrow 0$?

(Hinweis: Verwenden Sie die Formel für $\Delta(f \circ r)$ aus Beispiel 1.10 der Vorlesung.)

Aufgabe 55: Berechnen Sie $F(x) := \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\log t} dt$ für $x \geq 0$.

Aufgabe 56 a): Seien $f \in \mathcal{C}^1((a, b) \times (c, d))$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(a, b)$ mit $c < \varphi(t) \leq \psi(t) < d$ für alle $t \in (a, b)$. Zeigen Sie für die Funktion $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t, x) dx$ mit Hilfe der Kettenregel, daß gilt:

$$F'(t) = \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{df}{dt}(t, x) dx + f(t, \psi(t)) \frac{d\psi}{dt}(t) - f(t, \varphi(t)) \frac{d\varphi}{dt}(t)$$

b) Bestimmen Sie die Ableitung von

$$F(t) := \int_{\frac{1}{t}}^1 \frac{e^{tx}}{x} dx \quad \text{auf } (0, \infty).$$

Aufgabe 57: Berechnen Sie die lokalen Extremstellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := (4x^2 + y^2) \exp(-x^2 - 4y^2)$.

Aufgabe 58: Gegeben seien n Paare von Meßwerten $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Bestimmen Sie diejenige Gerade $y = ax + b$ in \mathbb{R}^2 , für die $\sum_{k=1}^n (y_k - ax_k - b)^2$ minimal wird („*Methode der kleinsten Quadrate*“).

Anmeldung zur Klausur

Die Klausur zum Erwerb eines Leistungsnachweises findet

am 14.8.2003 von 14³⁰ – 17³⁰ Uhr im Hörsaal 5 des HG II

statt. Anmeldungen zur Klausur werden bis zum **1.8.2003** in den Übungen oder von Frau Schulte (R. 635) entgegengenommen.