Musterlösung zu Blatt 0 (Topologie I, SS 03)

a) 1. Gegenbeispiel: Es sei $(M, d) := (\mathbb{R} \setminus \{0\}, |\cdot|)$. Dann sind die beiden Teilmengen $]-\infty, 0[$ und $]0, \infty[$ beide offen (mit der gleichen Begründung wie für offene Intervalle in $\mathbb{R}$) und auch beide abgeschlossen, da das Komplement jeweils offen ist.
2. Gegenbeispiel: (M, d) mit einer Menge M, die mindestens 2 Elemente besitzt, und der diskreten Metrik d, d.h.

$$d(x,y) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } x \neq y \\ 0 & \text{falls } x = y \end{cases} \qquad \text{für } x, y \in M.$$

Dann sind alle Teilmengen von M sowohl offen als auch abgeschlossen.

b) Gegenbeispiel: Es sei $(M, d) := (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Dann hat ein Intervall der Form $[a, b]$ mit $a < b$ zwar unendlich viele Elemente, ist aber nicht offen, da die Punkte a, b keine offenen Umgebungen haben, die ganz in dem Intervall liegen. Ebenso läßt sich für die unendliche Teilmenge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen argumentieren: sie enthält keine inneren Punkte.

c) Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $X := \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine endliche Teilmenge von M, so daß zunächst $X \neq \emptyset$ und $X \neq M$ gilt. Ist dann $x \in M \setminus X$ beliebig, so existiert das Minimum $r := \min\{d(x, x_i) \mid i = 1, \ldots, n\}$ und ist eine positive Zahl. Es gilt $B(x, r) \subset M \setminus X$, d.h. $M \setminus X$ ist offen. Also ist X abgeschlossen, und dies ist sicherlich auch für $X = \emptyset$ und $X = M$ der Fall.

d) Es sei (M, d) ein metrischer Raum mit $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ endlich und (ohne Einschränkung) $n \geq 2$. Ist dann $x_i \in M$ beliebig, so existiert das Minimum $r := \min\{d(x_i, x_j) \mid j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}\}$ und ist positiv. Daher ist die einpunktige Menge $\{x_i\} = B(x_i, r)$ offen. Also ist jede einpunktige Teilmenge von M offen und auch jede beliebige Teilmenge von M als Vereinigung einpunktiger (offener) Teilmengen.

e) Es sei (M, d) ein metrischer Raum mit $x, y \in M$ und $x \neq y$. Für $r := d(x, y)$ gilt dann $y \notin B(x, r)$, d.h. $B(x, r)$ ist eine offene Menge, die verschieden von M und $\emptyset$ ist. Also kann ein metrischer Raum, der außer M und $\emptyset$ keine offenen Mengen enthält, höchstens ein Element haben. (Insbesondere wird die triviale Topologie im allgemeinen nicht durch eine Metrik induziert.)

f) Gegenbeispiel: Es sei $(M, d) := (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Dann ist für $d'(x, y) = d(x, y)^2$ die Dreiecksungleichung im allgemeinen nicht erfüllt:

$$4 = |1 - 3|^2 \;>\; |1 - 2|^2 + |2 - 3|^2 = 2$$

g) 1. Gegenbeispiel: (M, d) mit einer Menge M, die mindestens 2 Elemente besitzt, und der diskreten Metrik d. Dann gilt für $r > 1$:

$$B(x, r) = \{y \in M \mid d(x, y) < r\} = M \quad \text{für alle } x \in M$$

Insbesondere also für $x, y \in M$ mit $x \neq y$: $B(x, r) = M = B(y, r)$.
2. Gegenbeispiel: (M, d) mit $M =]0, 1[$ und $d = |\cdot|$. Dann gilt:

$$B(x, 2) = \{y \in]0, 1[\mid |x - 2| < 2\} = M \quad \text{für alle } x \in M$$

h) Es sei (M, d) ein metrischer Raum und $x, y \in M$, so daß $B(x, r) \subset B(y, r)$ für alle $r > 0$ ist. Dann ist insbesondere $x \in B(y, r)$ für alle $r > 0$, d.h. es gilt:

$$0 \;\leq\; d(x, y) \;<\; r \quad \text{für alle } r > 0$$

Daraus folgt $d(x, y) = 0$ und somit $x = y$.

sawo