Prof. Dr. D. Erle
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

1. Übungsblatt zu „Topologie I“, SS 2003

<u>Abgabetermin:</u> Montag, 5.5.03, bis 14.15 Uhr in den Kästen

Aufgabe 1: Im $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Folgen reeller Zahlen betrachten wir den Unterraum M aller Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit konvergenter Quadratsumme, d.h. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. Zeigen Sie: Durch

$$\|(x_n)\|_2 := \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} \qquad \text{bzw.} \qquad \|(x_n)\|_\infty := \sup\{|\,x_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

werden Normen $\|\cdot\|_2,\ \|\cdot\|_\infty : M \to \mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 2: Die Normen $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ aus Aufgabe 1 sind nicht äquivalent. Beweisen Sie diese Aussage, indem Sie die beiden (identischen) Abbildungen

$$id_1 : (M, \|\cdot\|_\infty) \to (M, \|\cdot\|_2) \qquad \text{bzw.} \qquad id_2 : (M, \|\cdot\|_2) \to (M, \|\cdot\|_\infty)$$

auf Stetigkeit untersuchen.

Aufgabe 3: (X, d_1) und (Y, d_2) seien metrische Räume und $f, g : (X, d_1) \to (Y, d_2)$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie, daß die Menge $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 4: Eine *Pseudometrik* auf der Menge X ist eine Abbildung $d : X \times X \to [0, \infty]$, welche das Axiom

$$M_1' \quad d(x,x) = 0 \quad \text{für alle } \ x \in X$$

und die Metrik-Axiome M_2, M_3 erfüllt.

a) Sei L^2 die Menge der quadratintegrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$, d.h. für jedes $f \in L^2$ ist $\int\limits_0^1 (f(t))^2 dt$ wohldefiniert. Zeigen Sie, daß durch

$$d(f,g) := \sqrt{\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt}$$

eine Pseudometrik auf L^2 definiert wird.

b) Es sei S eine Menge, (M, d') ein metrischer Raum und X die Menge aller Abbildungen von S nach M. Zeigen Sie, daß durch

$$d^*(f,g) := \sup\{d'(f(x), g(x)) \mid x \in S\}$$

eine Pseudometrik auf X definiert wird.

Definieren d und d^* auch Metriken?