Musterlösung zu Blatt 1 (Topologie I, SS 03)

1 i) $\|\cdot\|_2$ ist Norm:

M ist Vektorraum (siehe Analysis). Für beliebige $(x_n), (y_n) \in M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(N_1) Es ist $\|(x_n)\|_2 \geq 0$ und

$$\|(x_n)\|_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

(N_2) $$\|\lambda(x_n)\|_2 \;=\; \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda x_n)^2} \;=\; \sqrt{\lambda^2 \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} \;=\; |\lambda| \cdot \|(x_n)\|_2$$

(N_3) $$\begin{aligned} \|(x_n) + (y_n)\|_2 \;&=\; \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)^2} \\ &\leq\; \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2} \qquad \text{(Minkowski-Ungleichung)} \\ &=\; \|(x_n)\|_2 + \|(y_n)\|_2 \end{aligned}$$

ii) $\|\cdot\|_\infty$ ist Norm:

Für beliebige $(x_n), (y_n) \in M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$\sup\{|\, x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} < \infty$, da (x_n) Nullfolge, d.h. $\|\cdot\|_\infty$ wohldefiniert

(N_1) Es ist $\|(x_n)\|_\infty \geq 0$ und

$$\|(x_n)\|_\infty = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sup\{|\, x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,.$$

(N_2) $$\|\lambda(x_n)\|_\infty \;=\; \sup\{|\, \lambda x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \;=\; |\lambda| \cdot \sup\{|\, x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \;=\; |\lambda| \cdot \|(x_n)\|_\infty$$

(N_3) $$\begin{aligned} \|(x_n) + (y_n)\|_\infty \;&=\; \sup\{|\, x_n + y_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq\; \sup\{|\, x_n\,| + |\, y_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &\leq\; \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|y_n| \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &=\; \|(x_n)\|_\infty + \|(y_n)\|_\infty \end{aligned}$$

Beachte: Bei der letzten Ungleichung gilt im allgemeinen nicht die Gleichheit (betrachte z.B. die Folgen $x_n := \frac{1}{n}$ und $y_n := 1 - \frac{1}{n}$).

2 Zeige, daß id_1 nicht stetig ist. Nach Satz 1.7 ist id_1 dann auch nicht Lipschitz-stetig, und die beiden Normen sind folglich nicht äquivalent.

1. Möglichkeit:

Annahme: id_1 stetig

Im folgenden bezeichne $B_i(x, r)$ den offenen Ball um x mit Radius $r > 0$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_i$ für $i \in \{2, \infty\}$. $B_2(0, 1)$ ist offene Umgebung des Nullpunktes in $(M, \|\cdot\|_2)$, und daher ist $B_2(0, 1) = id_1^{-1}(B_2(0, 1))$ offene Umgebung des Nullpunktes in $(M, \|\cdot\|_\infty)$. Also existiert ein $\delta > 0$ mit $B_\infty(0,\delta) \subset B_2(0,1)$. Definiere zu festem $N \in \mathbb{N}$ eine Folge (x_n) durch:

$$x_n := \begin{cases} \frac{\delta}{2} & \text{falls } 1 \leq n \leq N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $(x_n) \in M$, da nur endlich viele Folgeglieder von Null verschieden sind. Desweiteren ist $sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} < \delta$, d.h. $(x_n) \in B_\infty(0,\delta)$, und es gilt:

$$\|(x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{\delta^2}{4}} = \sqrt{N} \cdot \frac{\delta}{2}$$

Wird nun N so groß gewählt, daß $\sqrt{N} \cdot \frac{\delta}{2} \geq 1$ gilt, so ist $(x_n) \notin B_2(0,1)$.

Widerspruch!

Also ist id_1 nicht stetig, und daher sind die Normen $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ nicht äquivalent.

2. Möglichkeit:

Annahme: id_1 stetig

Nach Satz 2.8 ist id_1 dann folgenstetig, d.h. wenn eine Folge $((x_n)_k)$ von Folgen aus M bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ gegen eine Folge $(z_n) \in M$ konvergiert, so konvergiert die Bildfolge $(id_1((x_n)_k)) = ((x_n)_k)$ bzgl. $\|\cdot\|_2$ gegen $(id_1(z_n)) = (z_n)$.

Definiere eine Folge $((x_n)_k) = (x_n^k)$ durch:

$$x_n^k := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} & \text{falls } 1 \leq n \leq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $(x_n)_k \in M$ für jedes $k \in \mathbb{N}$, da jeweils nur endlich viele Folgeglieder von Null verschieden sind. Desweiteren ist $\|(x_n)_k\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{k}}$, d.h. $((x_n)_k)$ konvergiert für $k \to \infty$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ gegen die Nullfolge. Andererseits gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$:

$$\|(x_n)_k\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{k}} = 1$$

Insbesondere konvergiert $((x_n)_k)$ bzgl. $\|\cdot\|_2$ nicht gegen die Nullfolge.

Widerspruch!

Also ist id_1 nicht stetig, und daher sind die Normen $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ nicht äquivalent.

3. Möglichkeit:

Annahme: id_1 stetig

Nach Satz 1.7 ist id_1 Lipschitz-stetig, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $(x_n) \in M$ gilt:

$$\|(x_n)\|_2 = \|id_1(x_n)\|_2 \leq C\|(x_n)\|_\infty$$

Definiere eine Folge (x_n) durch:

$$x_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } 1 \leq n \leq 4C^2 + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $(x_n) \in M$, da nur endlich viele Folgeglieder von Null verschieden sind, und es gilt:

$$\|(x_n)\|_2 \;=\; \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} \;=\; \sqrt{\sum_{n=1}^{[4C^2+1]} 1^2} \;\geq\; \sqrt{4C^2} \;=\; 2C \quad \text{und} \quad \|(x_n)\|_\infty \;=\; 1$$

Mit der Definition der Lipschitz-Stetigkeit folgt:

$$2C \;\leq\; \|(x_n)\|_2 \;\leq\; C\|(x_n)\|_\infty \;=\; C$$

Widerspruch!

Also ist id_1 nicht stetig, und daher sind die Normen $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ nicht äquivalent.

Bemerkung: id_2 ist stetig, da Lipschitz-stetig, denn es gilt für alle $(x_n) \in M$:

$$\|(x_n)\|_\infty \;\leq\; \|(x_n)\|_2$$

Daher ist das von $\|\cdot\|_\infty$ erzeugte System offener Mengen in dem von $\|\cdot\|_2$ erzeugten System offener Mengen enthalten, d.h. die von $\|\cdot\|_2$ erzeugte Topologie ist feiner als die von $\|\cdot\|_\infty$ erzeugte.

3 Behauptung: $M := \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in X

Beweis: Zeige, daß das Komplement $X \setminus M$ offen ist. Zu beliebigem $x \in X \setminus M$ definiere $r := \frac{1}{2} d_2(f(x), g(x))$. Wegen $f(x) \neq g(x)$ ist $r > 0$, und somit sind die Bälle $U := B_{d_2}(f(x), r)$ und $V := B_{d_2}(g(x), r)$ offene Umgebungen von $f(x)$ bzw. $g(x)$ in Y mit $U \cap V = \emptyset$. Wegen der Stetigkeit von f und g ist $W := f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ offene Umgebung von x in X mit $W \subset X \setminus M$, denn für jedes $w \in W$ gilt $f(w) \neq g(w)$, da $f(w) \in U$, $g(w) \in V$ und $U \cap V = \emptyset$ ist. Also ist $X \setminus M$ offen, d.h. M abgeschlossen in X.

4 a) Für beliebige $f, g, h \in L^2$ gilt:

$f - g \in L^2$ (siehe Analysis) und $d(f,g) \geq 0$, d.h. d wohldefiniert

$$(M_1') \quad d(f,f) \;=\; \sqrt{\int_0^1 0\,dt} \;=\; 0$$

$$(M_2) \quad d(f,g) \;=\; \sqrt{\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt} \;=\; \sqrt{\int_0^1 (g(t) - f(t))^2 dt} \;=\; d(g,f)$$

$$\begin{aligned}
(M_3) \quad d(f,h) \;&=\; \sqrt{\int_0^1 (f(t) - h(t))^2 dt} \\
&=\; \sqrt{\int_0^1 [((f(t) - g(t)) + (g(t) - h(t))]^2 dt} \\
&\leq\; \sqrt{\int_0^1 (f(t) - g(t))^2 dt} + \sqrt{\int_0^1 (g(t) - h(t))^2 dt} \quad \text{(Minkowski-Ungl.)} \\
&=\; d(f,g) + d(g,h)
\end{aligned}$$

b) Für beliebige $f, g, h : S \to M$ gilt:

$d^*(f,g) \geq 0$, d.h. d^* wohldefiniert

(M_1') $d^*(f,f) = \sup\{d'(f(x), f(x)) \mid x \in S\} = 0$

(M_2) $d^*(f,g) = \sup\{d'(f(x), g(x)) \,|\, x \in S\} = \sup\{d'(g(x), f(x)) \,|\, x \in S\} = d^*(g,f)$

(M_3)
$$\begin{aligned} d^*(f,h) &= \sup\{d'(f(x), h(x)) \mid x \in S\} \\ &\leq \sup\{d'(f(x), g(x)) + d'(g(x), h(x)) \mid x \in S\} \\ &\leq \sup\{d'(f(x), g(x)) \mid x \in S\} + \sup\{d'(g(x), h(x)) \mid x \in S\} \\ &= d^*(f,g) + d^*(g,h) \end{aligned}$$

Definieren d und d^* Metriken?

i) d ist keine Metrik, da (M_1) nicht erfüllt ist. Betrachte z.B. die Funktionen

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g \equiv 0\,.$$

Dann ist $f, g \in L^2$ mit $f \neq g$ und $d(f,g) = 0$.
d ist jedoch eine Metrik auf geeigneten Teilmengen von L^2, z.B. auf der Menge aller stetigen Funktionen auf $[0,1]$.

ii) d^* definiert im allgemeinen keine Metrik, da d^* auch den Wert „∞“ annehmen kann. Betrachte z.B. $S := \mathbb{R}$, $M := \mathbb{R}$, $d'(x,y) := |x-y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und die Funktionen $f := id_{\mathbb{R}}$ und $g \equiv 0$. Dann ist $d^*(f,g) = \infty$.
d^* ist jedoch Metrik, wenn (M, d') beschränkt ist (siehe Vorlesung).

sawo