

## 2. Übungsblatt zu „Topologie I“, SS 2003

Abgabetermin: Montag, 12.5.03, bis 14.15 Uhr in den Kästen

**Aufgabe 5:** Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum. Definiere  $d_1 : X \times X \rightarrow [0, 1[$  und  $d_2 : X \times X \rightarrow [0, 1]$  durch:

$$d_1(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \text{bzw.} \quad d_2(x, y) := \min\{1, d(x, y)\}$$

Zeigen Sie, daß  $d_1$  und  $d_2$  Metriken auf  $X$  sind, welche das gleiche System offener Mengen erzeugen wie  $d$ .

**Aufgabe 6:** Es sei  $X := \mathbb{R}$  und  $d$  die euklidische Metrik, d.h.  $d(x, y) = |x - y|$ . Zeigen Sie, daß die Metrik  $d_1$  aus Aufgabe 5 nicht von einer Norm induziert wird.

**Aufgabe 7:** Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengensysteme Topologien sind:

- a)  $\mathcal{T}_1 = \{U \subset \mathbb{R} \mid U = \emptyset \text{ oder } \mathbb{R} \setminus U \text{ ist endlich oder abzählbar unendlich}\}$  (auf  $\mathbb{R}$ )
- b)  $\mathcal{T}_2 = \{U \subset \mathbb{R} \mid U = \emptyset \text{ oder } U = \mathbb{R} \text{ oder } U = [a, \infty[ \text{ mit } a \in \mathbb{R}\}$  (auf  $\mathbb{R}$ )
- c)  $\mathcal{T}_3 = \{U \subset [-1, 1] \mid 0 \notin U \text{ oder } ] - 1, 1[ \subset U\}$  (auf  $[-1, 1]$ )

**Aufgabe 8:** Es sei  $X$  ein topologischer Raum,  $A \subset X$  und  $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$  die *charakteristische Funktion* von  $A$ , d.h.

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \notin A \\ 1 & \text{falls } x \in A \end{cases} .$$

Geben Sie zwei verschiedene Topologien auf  $\mathbb{R}$  an, so daß  $\chi_A$  stetig ist, wenn  $A$  offen ist. Gibt es eine Topologie, für die die Äquivalenz ( $A$  offen  $\Leftrightarrow \chi_A$  stetig) gilt?