Musterlösung zu Blatt 2 (Topologie I, SS 03)

5 i) $\boldsymbol{d_1}$ ist Metrik:

Für beliebige $x, y, z \in X$ gilt:

$$
\begin{aligned}
(M_1) \quad d_1(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad d(x,y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = y
\end{aligned}
$$

$$(M_2) \quad d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d_1(y,x)$$

$$
\begin{aligned}
(M_3) \quad d_1(x,y) + d_1(y,z) \quad &= \quad \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)} \\
&\geq \quad \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)+d(y,z)} + \frac{d(y,z)}{1+d(y,z)+d(x,y)} \\
&= \quad \frac{1+d(x,y)+d(y,z)-1}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\
&= \quad 1 - \frac{1}{1+d(x,y)+d(y,z)} \\
&\geq \quad 1 - \frac{1}{1+d(x,z)} \\
&= \quad \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} \\
&= \quad d_1(x,z)
\end{aligned}
$$

(Alternativ läßt sich die Ungleichung

$$\frac{d(x,y)+d(y,z)}{1+d(x,y)+d(y,z)} \geq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)}$$

auch aus der Monotonie der reellen Funktion $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ folgern.)

ii) $\boldsymbol{d_2}$ ist Metrik:

Für beliebige $x, y, z \in X$ gilt:

$$
\begin{aligned}
(M_1) \quad d_2(x,y) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \min\{1, d(x,y)\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad d(x,y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x = y
\end{aligned}
$$

$$(M_2) \quad d_2(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} = \min\{1, d(y,x)\} = d_2(y,x)$$

$$
\begin{aligned}
(M_3)\quad d_2(x,y)+d_2(y,z) &= \min\{1,d(x,y)\}+\min\{1,d(y,z)\}\\
&\geq \min\{1,d(x,y)+d(y,z)\}\\
&\geq \min\{1,d(x,z)\}\\
&= d_2(x,z)
\end{aligned}
$$

iii) d_1 und d erzeugen das gleiche System offener Mengen:

Um nachzuweisen, daß eine Menge $\mathcal{O} \subset X$ bzgl. d genau dann offen ist, wenn Sie bzgl. d_1 offen ist, genügt es zu zeigen:

1) $\forall\, x \in X\ \forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\colon B_{d_1}(x,s) \subset B_d(x,r)$

2) $\forall\, x \in X\ \forall\, r > 0\ \exists\, s > 0\colon B_d(x,s) \subset B_{d_1}(x,r)$

Denn ist $\mathcal{O} \subset X$ offen bzgl. d, so existiert zu jedem $x \in \mathcal{O}$ ein $r > 0$ mit $B_d(x,r) \subset \mathcal{O}$ und daher wegen 1) auch ein $s > 0$, so daß $B_{d_1}(x,s) \subset B_d(x,r) \subset \mathcal{O}$ gilt, d.h. $\mathcal{O}$ ist auch offen bzgl. d_1. Entsprechend folgt mit 2), daß $\mathcal{O}$ offen bzgl. d ist, wenn $\mathcal{O}$ offen bzgl. d_1 ist.

zu 1):

Sind $x \in X$ und $r > 0$ beliebig gewählt, so definiere $s := \frac{r}{1+r}$. Für jedes $y \in B_{d_1}(x,s)$ gilt dann:

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \;=\; d_1(x,y) \;<\; s \;=\; \frac{r}{1+r}$$

Aus der strikten Monotonie der reellen Funktion $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ folgt $d(x,y) < r$, d.h. es ist $y \in B_d(x,r)$.

zu 2):

Wegen

$$d_1(x,y) \;=\; \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \;\leq\; d(x,y) \quad \text{für alle } x,y \in X$$

gilt $B_d(x,r) \subset B_{d_1}(x,r)$ für beliebige $x \in X$ und $r > 0$ (wähle also $s := r$).

iv) d_2 und d erzeugen das gleiche System offener Mengen:

Wegen

$$d_2(x,y) \;=\; \min\{1,d(x,y)\} \;\leq\; d(x,y) \quad \text{für alle } x,y \in X$$

gilt $B_d(x,r) \subset B_{d_2}(x,r)$ für beliebige $x \in X$ und $r > 0$.

Mit $s := \min\{1,r\}$ gilt umgekehrt $B_{d_2}(x,s) \subset B_d(x,r)$.

Bemerkung: Auf den ersten Blick ist es überraschend, daß d_1 und d_2 jeweils das gleiche System offener Mengen erzeugen wie d, da d_1 und d_2 beschränkt sind (somit z.B. $B_{d_1}(x,1) = X$), d jedoch im allgemeinen nicht. Insbesondere sind d_1 und d bzw. d_2 und d nicht äquivalent, d.h. es existieren keine Konstanten $\alpha, \beta > 0$, so daß $\alpha d_1(x,y) \leq d(x,y) \leq \beta d_1(x,y)$ für alle $x,y \in X$ gilt (und entsprechend für d_2).

6 **Annahme:** d_1 wird von einer Norm $\|\cdot\|$ erzeugt, d.h. $d_1(x,y) = \|x-y\|$.

Dann ist

$$\|x\| \;=\; d_1(x,0) \;=\; \frac{|x|}{1+|x|}$$

und somit

$$\|\lambda x\| \;=\; \frac{|\lambda x|}{1+|\lambda x|} \;=\; |\lambda|\cdot\frac{|x|}{1+|\lambda|\cdot|x|} \;\neq\; |\lambda|\cdot\frac{|x|}{1+|x|} \;=\; |\lambda|\cdot\|x\|$$

für $\lambda, x \neq 0$ und $|\lambda| \neq 1$. **Widerspruch!**

Bemerkung: Beschränkte Normen gibt es wegen dem Axiom $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ auf $\mathbb{R}$-Vektorräumen nicht (außer natürlich auf nulldimensionalen Vektorräumen ...). In diesem Fall sind daher von Normen induzierte Metriken stets unbeschränkt (wegen $\|x\| = d(x,0)$).

7 a) Durch $\mathcal{T}_1 = \{U \subset \mathbb{R} \mid U = \emptyset$ oder $\mathbb{R}\backslash U$ ist endlich oder abzählbar unendlich$\}$ wird eine Topologie auf $\mathbb{R}$ definiert, denn:

($\mathcal{O}_1$) Ist $I \neq \emptyset$ eine beliebige Indexmenge und $(U_i)_{i\in I}$ ein System von Mengen aus $\mathcal{T}_1$, so daß $\mathbb{R} \setminus U_k$ endlich oder abzählbar unendlich für ein $k \in I$ ist, dann ist

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{i\in I} U_i \;=\; \bigcap_{i\in I} (\mathbb{R}\setminus U_i) \;\subset\; \mathbb{R}\setminus U_k$$

endlich oder abzählbar unendlich und somit $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_1$. Ist andernfalls $U_i = \emptyset$ für alle $i \in I$, so ist auch $\bigcup\limits_{i\in I} U_i = \emptyset \in \mathcal{T}_1$ (gilt auch für $I = \emptyset$).

($\mathcal{O}_2$) Ist $E \neq \emptyset$ eine endliche Indexmenge und $(U_i)_{i\in E}$ ein System von Mengen aus $\mathcal{T}_1$, so daß $\mathbb{R} \setminus U_i$ endlich oder abzählbar unendlich für jedes $i \in E$ ist, dann ist

$$\mathbb{R} \setminus \bigcap_{i\in E} U_i \;=\; \bigcup_{i\in E} (\mathbb{R}\setminus U_i)$$

endlich oder abzählbar unendlich und somit $\bigcap\limits_{i\in E} U_i \in \mathcal{T}_1$. Ist $U_i = \emptyset$ für ein $i \in E$, dann ist auch $\bigcap\limits_{i\in E} U_i = \emptyset \in \mathcal{T}_1$. Ist $E = \emptyset$, so ist $\bigcap\limits_{i\in E} U_i = \mathbb{R} \in \mathcal{T}_1$, da $\mathbb{R}\backslash\mathbb{R} = \emptyset$ endlich.

b) Durch $\mathcal{T}_2 = \{U \subset \mathbb{R} \mid U = \emptyset$ oder $U = \mathbb{R}$ oder $U = [a, \infty[$ mit $a \in \mathbb{R}\}$ wird keine Topologie auf $\mathbb{R}$ definiert, denn für die Vereinigung der Mengen $[\frac{1}{n}, \infty[\; \in \mathcal{T}_2$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\,\frac{1}{n}, \infty\,[\;=\;]\,0, \infty\,[\;\notin \mathcal{T}_2$$

c) Durch $\mathcal{T}_3 = \{U \subset [-1,1] \mid 0 \notin U$ oder $]-1,1[\; \subset U\}$ wird eine Topologie auf $[-1,1]$ definiert, denn:

($\mathcal{O}_1$) Es sei $(U_i)_{i\in I}$ ein beliebiges System von Mengen aus $\mathcal{T}_3$. Ist dann $]-1,1[\; \subset U_i$ für ein $i \in I$, so ist $]-1,1[\; \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, d.h. $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_3$. Gilt $]-1,1[\; \subset U_i$ für kein $i \in I$, so ist $0 \notin U_i$ für jedes $i \in I$ und somit auch $0 \notin \bigcup\limits_{i\in I} U_i$, d.h. $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_3$ (gilt auch für $I = \emptyset$).

($\mathcal{O}_2$) Es sei E eine endliche Indexmenge und $(U_i)_{i\in E}$ ein beliebiges System von Mengen aus $\mathcal{T}_3$. Ist dann $0 \notin U_i$ für ein $i \in E$, so ist $0 \notin \bigcap\limits_{i\in E} U_i$, d.h. $\bigcap\limits_{i\in E} U_i \in \mathcal{T}_3$. Gilt $0 \in U_i$ für alle $i \in E$, so ist $]-1,1[\; \subset U_i$ für alle $i \in E$ und somit auch $]-1,1[\; \subset \bigcap\limits_{i\in E} U_i$, d.h. $\bigcap\limits_{i\in E} U_i \in \mathcal{T}_3$ (gilt auch für $E = \emptyset$).

8 Besitzt $\mathbb{R}$ die triviale Topologie, so ist jede Abbildung $X \to \mathbb{R}$ stetig.
Sei $\mathcal{T} := \{\emptyset, \{1\}, \mathbb{R}\}$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$, und es gilt:

$$\begin{aligned} \chi_A \text{ stetig} \quad &\Leftrightarrow \quad \chi_A^{-1}(\mathcal{O}) \text{ offen in } X \text{ für alle } \mathcal{O} \in \mathcal{T} \\ &\Leftrightarrow \quad A = \chi_A^{-1}(\{1\}) \text{ offen in } X\,, \end{aligned}$$

da $\chi_A^{-1}(\{\emptyset\}) = \emptyset$ und $\chi_A^{-1}(\{\mathbb{R}\}) = X$ immer offen in X sind.

sawo