Musterlösung zu Blatt 3 (Topologie I, SS 03)

9 Es sei $X = \{a, b, c, d, e\}$. Ist dann $S := \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, e\}\}$ Subbasis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X, dann ergibt die Menge aller endlichen Schnitte von Elementen aus S eine Basis von $\mathcal{T}$. Es gilt:

$$\{a, b, c\} \cap \{a, b, d\} = \{a, b\}\ ,\ \{a, b, c\} \cap \{b, e\} = \{b\}\ ,\ \{a, b, d\} \cap \{b, e\} = \{b\}$$

und

$$\{a, b, c\} \cap \{a, b, d\} \cap \{b, e\} = \{b\}$$

Unter Berücksichtigung der Schnitte über einelementige Indexmengen und der leeren Indexmenge ergibt sich daraus die Basis

$$\mathcal{B} \ = \ \{\{a, b, c, d, e\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{b, e\}, \{a, b\}, \{b\}\}.$$

$\mathcal{T}$ besteht aus der Menge der Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{T} \ = \ \mathcal{B} \cup \{\emptyset, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, b, e\}\}$$

10 Es sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, wobei $\mathcal{B}_1$ die Mengen der Form $\mathcal{O}_{a,b}$ und $\mathcal{B}_2$ die Mengen der Form $\mathcal{O}_c$ enthalte.

a) Es gilt:

(B_1) $\bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B = X$

(B_2) $B, B' \in \mathcal{B} \ \Rightarrow\ B \cap B'$ ist Vereinigung von zu $\mathcal{B}$ gehörigen Mengen, denn:

Ist $B \cap B' = \emptyset$, so kann $B \cap B'$ als Vereinigung über einer leeren Indexmenge dargestellt werden. Sei also im folgenden $B \cap B' \neq \emptyset$. Gilt $B, B' \in \mathcal{B}_1$ oder $B, B' \in \mathcal{B}_2$, so gilt auch $B \cap B' \in \mathcal{B}_1$ bzw. $B \cap B' \in \mathcal{B}_2$. Ist $B \in \mathcal{B}_1$ und $B' \in \mathcal{B}_2$ oder umgekehrt, dann besteht $B \cap B'$ aus Elementen der Form $(x, 0)$ mit $x \in S := \,]\,a, b\,[\ \cap\ (\ ]-c, 0\,[\ \cup\ ]\,0, c\,[\ )$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $c > 0$. Gilt $0 \notin\ ]\,a, b\,[$, so ist $S = \,]\,d, e\,[$ für $d, e \in \mathbb{R}$ mit $d < e$ und somit $B \cap B' \in \mathcal{B}_1$. Gilt $0 \in\ ]\,a, b\,[$, so ist $S = \,]\,d, 0\,[\ \cup\ ]\,0, e\,[$ für positive $d, e \in \mathbb{R}$, und $B \cap B'$ ist Vereinigung von zwei Mengen aus $\mathcal{B}_1$.

Nach Satz 2.3 existiert somit eine eindeutig bestimmte Topologie auf X, die $\mathcal{B}$ als Basis hat.

b) **1. Möglichkeit:**

Annahme: Die Topologie wird von einer Metrik d erzeugt.

Definiere $r := \frac{1}{2}d((0, 0), (0, 1)) > 0$. Dann sind $U := B((0, 0), r)$ und $V := B((0, 1), r)$ offene Umgebungen von $(0, 0)$ bzw. $(0, 1)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Nach Definition der Basis $\mathcal{B}$ existieren $\mathcal{O}_1 \in \mathcal{B}_1$ mit $(0, 0) \in \mathcal{O}_1 \subset U$ und $\mathcal{O}_2 \in \mathcal{B}_2$ mit $(0, 1) \in \mathcal{O}_2 \subset V$. Desweiteren gibt es $a, b > 0$, so daß alle Elemente der Form $(x, 0)$ mit $x \in\ ]-a, a\,[$ in $\mathcal{O}_1$ und alle Elemente der Form $(x, 0)$ mit $x \in\ ]-b, 0\,[\ \cup\ ]\,0, b\,[$ in $\mathcal{O}_2$ enthalten sind. Daher sind die Elemente der Form $(x, 0)$ mit $x \in\ ]-c, 0\,[\ \cup\ ]\,0, c\,[$ und $c := \min\{a, b\}$ in $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ enthalten. Insbesondere ist also der Schnitt $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$. Andererseits gilt $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \subset U \cap V = \emptyset$. **Widerspruch!**

2. Möglichkeit:

Definiere eine Folge (x_n) in X durch $x_n := (\frac{1}{n}, 0)$ für $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\frac{1}{n} \to 0$ in $\mathbb{R}$ folgt mit der Definition der Topologie sofort

$$\forall\, U \in \mathcal{U}((0,0))\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq N\colon\ x_n \in U, \text{ d.h. } x_n \to (0,0),$$

und

$$\forall\, U \in \mathcal{U}((0,1))\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq N\colon\ x_n \in U, \text{ d.h. } x_n \to (0,1).$$

Also existieren zwei verschiedene Grenzwerte der Folge (x_n), und somit kann die Topologie nicht durch eine Metrik erzeugt werden (siehe Satz 2.7).

11 i) Es sei $\mathcal{T}_1 := \{U \subset \mathbb{R} \mid U = \emptyset \text{ oder } \mathbb{R} \setminus U \text{ abzählbar}\}$. Dann besitzt kein Punkt $x \in \mathbb{R}$ eine abzählbare Umgebungsbasis, denn:

Annahme: $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in I\}$ ist abzählbare Umgebungsbasis von x.

Es sei $B_i \neq \emptyset$ ohne Einschränkung offen für alle $i \in I$. Dann ist $\mathbb{R} \setminus B_i$ abzählbar für jedes $i \in I$, und somit ist auch die abzählbare Vereinigung $\bigcup\limits_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus B_i)$ abzählbar. Da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, existiert ein Element $y \neq x$ aus dem Komplement von

$$\bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus B_i) \ = \ \mathbb{R} \setminus \bigcap_{i \in I} B_i,$$

d.h. $y \in B_i$ für jedes $i \in I$. Dann existiert aber zu der Menge $U_y := \mathbb{R} \setminus \{y\} \in \mathcal{T}_1$ mit $x \in U_y$ kein Element $B_i \in \mathcal{B}$ mit $B_i \subset U_y$. **Widerspruch!**

Also existiert keine abzählbare Umgebungsbasis zu x, d.h. $\mathcal{T}_1$ erfüllt nicht das 1. Abzählbarkeitsaxiom. Nach Satz 2.5 kann das 2. Abzählbarkeitsaxiom dann auch nicht erfüllt sein.

ii) Es sei $\mathcal{T}_3 := \{U \subset [-1,1] \mid 0 \notin U \text{ oder }]-1,1[\subset U\}$. Dann besitzt jeder Punkt $x \in [-1,1]$ eine abzählbare Umgebungsbasis, denn ist $x \neq 0$, so ist $\{\{x\}\} \subset \mathcal{T}_3$ eine Umgebungsbasis von x, und $\{\,]-1,1[\,\} \subset \mathcal{T}_3$ ist offensichtlich eine Umgebungsbasis von 0. Somit erfüllt $\mathcal{T}_3$ das 1. Abzählbarkeitsaxiom.

Das 2. Abzählbarkeitsaxiom ist nicht erfüllt, denn es kann keine abzählbare Basis der Topologie geben, da $\mathcal{T}_3$ überabzählbar viele einpunktige Mengen $\{x\}$ mit $x \neq 0$ enthält.

12 Es sei $\mathcal{T}_1 := \{U \subset \mathbb{R} \,|\, U = \emptyset \text{ oder } \mathbb{R} \setminus U \text{ abzählbar}\}$ und $\mathcal{T}$ die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$.

Behauptung: $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ stetig $\Leftrightarrow$ f konstant

Beweis:

„$\Leftarrow$“: Die Aussage gilt für jede konstante Abbildung $f : X \to Y$ zwischen beliebigen topologischen Räumen X und Y, denn wenn $f(x) = y_0 \in Y$ für alle $x \in X$ gilt, dann ist für jede offene Menge $U \subset Y$

$$f^{-1}(U) \ = \ \begin{cases} \emptyset & \text{falls } y_0 \notin U \\ X & \text{falls } y_0 \in U \end{cases} \qquad \text{offen.}$$

„⇒“: **Annahme:** Es existieren $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \neq f(y)$.

Für $r := \frac{|x-y|}{2}$ ist dann

$$]\, x-r, x+r \,[\;\cap\;]\, y-r, y+r \,[\;=\; \emptyset\,,$$

und $A := f^{-1}(\,]\, x-r, x+r\,[\,)$, $B := f^{-1}(\,]\, y-r, y+r\,[\,)$ sind beide offen, da f stetig ist, und nicht leer, da $x \in A$ und $y \in B$. Daher sind nach Definition von $\mathcal{T}_1$ die Komplemente $\mathbb{R} \setminus A$ und $\mathbb{R} \setminus B$ jeweils abzählbar, d.h. es ist auch

$$(\mathbb{R} \setminus A) \cup (\mathbb{R} \setminus B) \;=\; \mathbb{R} \setminus \underbrace{(A \cap B)}_{=\,\emptyset} \;=\; \mathbb{R}$$

abzählbar. **Widerspruch!**

sawo