Prof. Dr. D. Erle
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

4. Übungsblatt zu „Topologie I“, SS 2003

Abgabetermin: Montag, 26.5.03, bis 14.15 Uhr in den Kästen

Aufgabe 13: Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

a) Beweisen Sie: Erfüllt $(X, \mathcal{T})$ das 2. Abzählbarkeitsaxiom, so enthält X eine abzählbare dichte Teilmenge.

b) Zeigen Sie, daß die Umkehrung von a) im allgemeinen falsch ist.
Hinweis: Betrachten Sie $\mathbb{R}$ zusammen mit der Topologie

$$\mathcal{T} := \{U \subset \mathbb{R} \mid U = \emptyset \text{ oder } \mathbb{R} \backslash U \text{ endlich}\}.$$

Dann erfüllt $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ nicht das 2. Abzählbarkeitsaxiom, aber $\mathbb{Q}$ ist eine dichte abzählbare Teilmenge von $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Aufgabe 14: Durch $a_n := (-1)^n$ wird eine Folge (a_n) auf der Menge $X := \{-1, 1\}$ definiert. Untersuchen Sie diese Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls sämtliche Grenzwerte, wobei X mit einer der folgenden Topologien versehen sei.

a) die triviale Topologie $\mathcal{T}_1$

b) die diskrete Topologie $\mathcal{T}_2$

c) die Topologie $\mathcal{T}_3 := \{\emptyset, \{1\}, X\}$

Aufgabe 15: Bestimmen Sie $\mathring{A}$, $\overline{A}$ und $Rd(A)$ für $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

a) in $\mathbb{R}^2$,

b) in $X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$,

c) in A.

Aufgabe 16: Es seien A und B Teilmengen eines topologischen Raumes X. Zeigen Sie:

a) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

b) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$

c) $Rd(A) = \emptyset \Leftrightarrow A$ ist offen und abgeschlossen

d) $Rd(\mathring{A}) \subset Rd(A)$

Geben Sie bei a), b) und d) Beispiele für echte Teilmengenbeziehungen an.