Musterlösung zu Blatt 4 (Topologie I, SS 03)

13 a) Erfüllt $(X, \mathcal{T})$ das 2. Abzählbarkeitsaxiom, so enthält X eine abzählbare dichte Teilmenge, denn:

Es sei $\mathcal{B} := \{B_i \mid i \in I\}$ eine Basis mit einer abzählbaren Indexmenge I, wobei ohne Einschränkung $B_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$ vorausgesetzt werden kann. Wähle für jedes $i \in I$ ein Element $x_i \in B_i$, und definiere $A := \{x_i \mid i \in I\}$. Dann ist A dicht in X, denn zu beliebigen $x \in X$ und $U \in \mathcal{U}(x)$ existiert ein $B_i \in \mathcal{B}$ mit $B_i \subset U$. Wegen $x_i \in B_i \subset U$ ist $x_i \in A \cap U \neq \emptyset$, d.h. es ist $x \in \overline{A}$, also $\overline{A} = X$.

b) Es sei $\mathcal{T} := \{U \subset \mathbb{R} \mid U = \emptyset \text{ oder } \mathbb{R} \backslash U \text{ endlich}\}$ (*kofinite Topologie*). Dann gilt:

i) $\mathcal{T}$ besitzt keine abzählbare Basis, denn:

1. Möglichkeit:

Annahme: $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in I\}$ Basis und I abzählbar

Ohne Einschränkung sei $B_i \neq \emptyset$ für alle $i \in I$. Dann ist $\mathbb{R} \setminus B_i$ endlich für jedes $i \in I$, und somit ist

$$\bigcup_{i \in I} (\mathbb{R} \setminus B_i) \;=\; \mathbb{R} \setminus \bigcap_{i \in I} B_i$$

abzählbar. Da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, existiert ein $x \in \bigcap_{i \in I} B_i$. $\mathbb{R} \backslash \{x\}$ ist offen (da das Komplement endlich ist) und nicht leer. Da $\mathcal{B}$ Basis der Topologie ist, existiert daher ein $j \in I$, so daß $B_j \subset \mathbb{R} \backslash \{x\}$ gilt, d.h. es ist $x \notin B_j$. **Widerspruch!**

2. Möglichkeit:

Völlig analog zu Aufgabe 11 (für $\mathcal{T}_1$) läßt sich zeigen, daß $\mathcal{T}$ das 1. Abzählbarkeitsaxiom nicht erfüllt. Somit kann auch das 2. Abzählbarkeitsaxiom für $\mathcal{T}$ nicht gelten.

ii) $\mathbb{Q}$ ist dicht in X bezüglich $\mathcal{T}$, denn $\overline{\mathbb{Q}} \supset \mathbb{Q}$ besitzt unendlich viele Elemente und ist abgeschlossen. Da somit $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ offen ist, gilt $\mathbb{R} \setminus \overline{\mathbb{Q}} = \emptyset$ nach Definition von $\mathcal{T}$, d.h. es ist $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

14 a) (a_n) konvergiert gegen jeden Punkt von X (gilt für jede Folge in einem Raum mit trivialer Topologie)

b) (a_n) konvergiert nicht, da $\{-1\}$ und $\{1\}$ offen sind (gilt für jede Folge, die nicht konstant ab einer Stelle $N \in \mathbb{N}$ wird, in einem Raum mit diskreter Topologie)

c) $\lim_{n \to \infty} a_n = -1$, da $\{1\}$ offen und $\{-1\}$ nicht offen

15 a) $\overline{A} = A \cup \{(0,0)\}$, $\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$,

$Rd(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(0,0)\}$

b) $\overline{A} = X$, $\mathring{A} = A$, $Rd(A) = \{(0,0)\}$

c) $\overline{A} = A = \mathring{A}$, $Rd(A) = \emptyset$

16 Vorbemerkung: Ist $A \subset B$, so folgt $\overline{A} \subset \overline{B}$, da $A \subset B \subset \overline{B}$ gilt und $\overline{A}$ die kleinste abgeschlossene Obermenge von A ist, d.h. $A \subset \overline{A} \subset \overline{B}$. Ebenso folgt aus $A \subset B$, daß $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ ist, da $\mathring{A} \subset A \subset B$ gilt und $\mathring{B}$ die größte offene Teilmenge von B ist, d.h. $\mathring{A} \subset \mathring{B} \subset B$.

a) **1. Möglichkeit:** mit der Definition

$$
\begin{aligned}
& x \in \overline{A \cap B} \\
\Rightarrow\ & \forall U \in \mathcal{U}(x) \colon U \cap A \cap B \neq \emptyset \\
\Rightarrow\ & \forall U \in \mathcal{U}(x) \colon U \cap A \neq \emptyset \ \wedge\ U \cap B \neq \emptyset \\
\Rightarrow\ & x \in \overline{A} \ \wedge\ x \in \overline{B} \\
\Rightarrow\ & x \in \overline{A} \cap \overline{B}
\end{aligned}
$$

2. Möglichkeit: mit der Vorbemerkung

Wegen $A \cap B \subset A$ und $A \cap B \subset B$ folgt mit der Vorbemerkung $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ und $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$, also auch $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

b) **1. Möglichkeit:** mit der Definition

$$
\begin{aligned}
& x \in \mathring{A} \cup \mathring{B} \\
\Rightarrow\ & x \in \mathring{A} \ \vee\ x \in \mathring{B} \\
\Rightarrow\ & A \in \mathcal{U}(x) \ \vee\ B \in \mathcal{U}(x) \\
\Rightarrow\ & A \cup B \in \mathcal{U}(x) \\
\Rightarrow\ & x \in \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}
\end{aligned}
$$

2. Möglichkeit: mit der Vorbemerkung

Wegen $A \subset A \cup B$ und $B \subset A \cup B$ folgt mit der Vorbemerkung $\mathring{A} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ und $\mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$, also auch $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$.

3. Möglichkeit: mit Teil a)

Nach Teil a) gilt:

$$
\begin{aligned}
X \setminus (\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}) &= \overline{X \setminus (A \cup B)} \\
&= \overline{(X \setminus A) \cap (X \setminus B)} \\
&\subset (\overline{X \setminus A}) \cap (\overline{X \setminus B}) \\
&= (X \setminus \mathring{A}) \cap (X \setminus \mathring{B}) \ = \ X \setminus (\mathring{A} \cup \mathring{B})
\end{aligned}
$$

Die Behauptung ergibt sich durch Übergang zu den Komplementen.

c) Wegen $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$ gilt $Rd(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \emptyset$ genau dann, wenn $\mathring{A} = A = \overline{A}$ ist, und dies ist äquivalent dazu, daß A offen und abgeschlossen ist.

d) Mit der Vorbemerkung folgt aus $\mathring{A} \subset A$, daß $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$ gilt, und damit auch:

$$
Rd(\mathring{A}) \ = \ \overline{\mathring{A}} \setminus \mathring{\mathring{A}} \ = \ \overline{\mathring{A}} \setminus \mathring{A} \ \subset \ \overline{A} \setminus \mathring{A} \ = \ Rd(A)
$$

Beispiel für echte Inklusionen: $X = \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie, $A = \mathbb{Q}$ und $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

sawo