Prof. Dr. D. Erle
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

5. Übungsblatt zu „Topologie I“, SS 2003

Abgabetermin: Montag, 2.6.03, bis 14.15 Uhr in den Kästen

Aufgabe 17: Es sei $X := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ oder } y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ mit der Unterraumtopologie der euklidischen Topologie von $\mathbb{R}^2$ versehen. Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen offen oder abgeschlossen sind:

a) $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ \pi(x,y) := x$

b) $\widetilde{\pi} : X \to \mathbb{R}\,,\ \widetilde{\pi}(x,y) := x$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) := x^2$

Aufgabe 18: Die Mengen $S^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ und $[\,0,1\,[\, \subset \mathbb{R}$ seien jeweils mit der Unterraumtopologie versehen. Untersuchen Sie, ob die Abbildung

$$f : [\,0,1\,[\, \to S^1\,,\ f(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 19: **a)** $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei mit der euklidischen Unterraumtopologie versehen. Eine Abbildung $h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sei definiert durch

$$h(x) \ := \ \frac{x}{\|x\|^2}\,,$$

wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichne. Zeigen Sie, daß h ein Homöomorphismus ist.

b) $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\} < 1\}$ und $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ seien jeweils mit der euklidischen Unterraumtopologie versehen. Zeigen Sie, daß Q zu K homöomorph ist.

Aufgabe 20: $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ sei eine Familie topologischer Räume.

a) Zeigen Sie, daß die Mengen der Form $\prod_{i\in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}_i$ für alle $i \in I$ die Basis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf $\prod_{i\in I} X_i$ bilden, nämlich der sogenannten *Box-Topologie.*

b) Zeigen Sie, daß die Box-Topologie mit der Produkttopologie auf $\prod_{i\in I} X_i$ übereinstimmt, falls I endlich ist.

c) Gilt die Aussage von Teil b) auch für beliebige Indexmengen I?