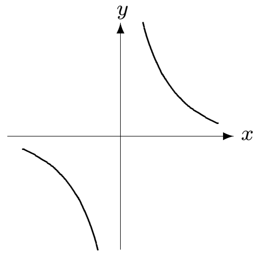
Musterlösung zu Blatt 5 (Topologie I, SS 03)

17 a) $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ \pi(x,y) := x$

$\boldsymbol{\pi}$ nicht abgeschlossen:

$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$, da Urbild der abgeschlossenen Teilmenge $\{1\} \subset \mathbb{R}$ unter der stetigen Abbildung $(x,y) \mapsto xy$, aber $\pi(A) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist nicht abgeschlossen in $\mathbb{R}$.



$\boldsymbol{\pi}$ offen:
Satz 3.6 (Die Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ wird durch die Maximumsnorm induziert und ist daher identisch mit der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^2$, da je zwei Normen auf $\mathbb{R}^2$ äquivalent sind und somit dieselbe Topologie erzeugen.)

b) $\widetilde{\pi} : X \to \mathbb{R}\,,\ \widetilde{\pi}(x,y) := x$

$\boldsymbol{\widetilde{\pi}}$ nicht abgeschlossen:

wie bei Teil a) mit $A \cap X$

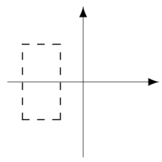
$\boldsymbol{\widetilde{\pi}}$ offen:

Es genügt, die Offenheit von $\widetilde{\pi}$ auf einer Basis der Topologie von X zu zeigen. $\mathcal{B} := \{\,]\,x - r_1, x + r_1\,[\, \times \,]\,y - r_2, y + r_2\,[\, \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2, r_1 > 0, r_2 > 0\}$ ist eine Basis der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^2$, und daher ist $\{B \cap X \mid B \in \mathcal{B} \text{ mit } B \cap X \neq \emptyset\}$ eine Basis der Unterraumtopologie. Sei nun $B \in \mathcal{B}$ mit $B \cap X \neq \emptyset$ beliebig.

1. Fall: $x + r_1 \leq 0$

$\Rightarrow\ B \cap X = \,]\,x - r_1, x + r_1\,[\, \times \{0\}$ (da $B \cap X \neq \emptyset$)

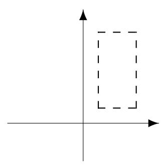
$\Rightarrow\ \widetilde{\pi}(B \cap X) = \,]\,x - r_1, x + r_1\,[\,$ offen in $\mathbb{R}$



2. Fall: $x - r_1 \geq 0$

$\Rightarrow\ B \cap X = B$

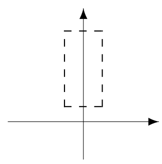
$\Rightarrow\ \widetilde{\pi}(B \cap X) = \pi(B) = \,]\,x - r_1, x + r_1\,[\,$ offen in $\mathbb{R}$



3. Fall: $x - r_1 < 0 < x + r_1$ und $(0,0) \notin B$

$\Rightarrow\ B \cap X = \,]\,0, x + r_1\,[\, \times \,]\,y - r_2, y + r_2\,[$

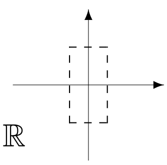
$\Rightarrow\ \widetilde{\pi}(B \cap X) = \,]\,0, x + r_1\,[\,$ offen in $\mathbb{R}$



4. Fall: $x - r_1 < 0 < x + r_1$ und $(0,0) \in B$

$\Rightarrow\ B \cap X = (\,]\,x - r_1, 0\,] \times \{0\}) \cup (\,]\,0, x + r_1\,[\, \times \,]\,y - r_2, y + r_2\,[\,)$

$\Rightarrow\ \widetilde{\pi}(B \cap X) = \,]\,x - r_1, 0\,] \cup \,]\,0, x + r_1\,[\, = \,]\,x - r_1, x + r_1\,[\,$ offen in $\mathbb{R}$



c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) := x^2$

***f* nicht offen:**

$f(\mathbb{R}) = [\,0, \infty\,[\,$ nicht offen in $\mathbb{R}$

***f* abgeschlossen:**

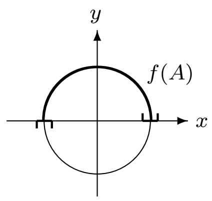
Betrachte die Abbildungen $f_1 : [\,0,\infty\,[\, \to [\,0,\infty\,[$ und $f_2 :]-\infty,0\,] \to [\,0,\infty\,[$ mit der gleichen Abbildungsvorschrift wie die für f. Dann sind f_1 und f_2 stetige und bijektive Abbildungen mit stetigen Umkehrabbildungen $x \mapsto \sqrt{x}$ bzw. $x \mapsto -\sqrt{x}$, d.h. f_1 und f_2 sind Homöomorphismen, insbesondere also abgeschlossen. Ist nun $A \subset \mathbb{R}$ eine beliebige abgeschlossene Teilmenge, so läßt sich A darstellen als $A = A_1 \cup A_2$ mit $A_1 = A \cap [\,0,\infty\,[$ und $A_2 = A \cap\,]-\infty,0\,]$, und es gilt:

$$f(A) \;=\; f(A_1 \cup A_2) \;=\; f(A_1) \cup f(A_2) \;=\; f_1(A_1) \cup f_2(A_2)$$

$f_1(A_1)$ und $f_2(A_2)$ sind abgeschlossen in $[\,0,\infty\,[$ und, da $[\,0,\infty\,[$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist, auch abgeschlossen in $\mathbb{R}$ (denn es gilt allgemein: Es sei X ein topologischer Raum und $U \subset X$ mit der Unterraumtopologie versehen. Ist dann U abgeschlossen in X und B abgeschlossen in U, so existiert nach Definition der Unterraumtopologie eine in X abgeschlossene Menge V mit $B = V \cap U$, d.h. es ist auch B abgeschlossen in X. Eine entsprechende Aussage gilt für „offen“ anstelle von „abgeschlossen“). Also ist $f(A) = f_1(A_1) \cup f_2(A_2)$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

18 Die Abbildung

$$f : [\,0,1\,[\, \to S^1\,,\; f(t) := (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$



ist zwar stetig und bijektiv, aber f ist nicht offen: Betrachte z.B. die Teilmenge $A := [\,0,\frac{1}{2}\,[\, \subset [\,0,1\,[$. A ist offen in $[\,0,1\,[$, denn die Menge läßt sich darstellen als Schnitt einer in $\mathbb{R}$ offenen Menge mit $[\,0,1\,[$, z.B. $A = \,]-1,\frac{1}{2}\,[\, \cap [\,0,1\,[$. Aber $f(A)$ ist keine offene Teilmenge von S^1, da für jeden offenen Ball $B(f(0),r)$ in $\mathbb{R}^2$ um $f(0) = (1,0)$ mit $r > 0$ gilt: $B(f(0),r) \cap (S^1 \setminus f(A)) \neq \emptyset$ (denn für $(x,y) \in f(A)$ gilt stets $y \geq 0$, aber $B((1,0),r) \cap S^1$ enthält für jedes $r > 0$ Punkte mit negativer y-Koordinate). Also ist f kein Homöomorphismus.

19 a) Die Abbildung $h : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, definiert durch

$$h(x) := \frac{x}{\|x\|^2} \;=\; \begin{pmatrix} \alpha(x)x_1 \\ \vdots \\ \alpha(x)x_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha(x) := \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}\,,$$

ist stetig, da jede Komponentenfunktion Zusammensetzung stetiger Funktionen ist. Desweiteren gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$:

$$h(h(x)) \;=\; h\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right) \;=\; \frac{\frac{x}{\|x\|^2}}{\|\frac{x}{\|x\|^2}\|^2} \;=\; \frac{\frac{x}{\|x\|^2}}{\frac{1}{\|x\|^4}\|x\|^2} \;=\; x$$

Also ist $h \circ h = id_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}$, d.h. h ist bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung $h^{-1} = h$. Insgesamt ist h somit ein Homöomorphismus.

Bemerkung: Anstelle der euklidischen Norm läßt sich auch eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ verwenden, denn $x \mapsto \|x\|$ ist stets (Lipschitz-)stetig.

b) Es ist $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|, |y|\} < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty < 1\}$ und $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < 1\}$, d.h. Q und K sind offene Bälle um den Nullpunkt mit Radius Eins bezüglich der Supremums- bzw. euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^2$. Die beiden Normen sind äquivalent, insbesondere gilt

$$\|x\|_\infty \;\leq\; \|x\|_2 \;\leq\; \sqrt{2}\,\|x\|_\infty$$

und damit

$$\frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} \;\leq\; 1 \quad \text{und} \quad \frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty} \;\leq\; \sqrt{2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Daraus folgt unmittelbar, daß die Abbildungen $f : Q \to K$ und $g : K \to Q$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2}\, x & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad g(x) := \begin{cases} \dfrac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty}\, x & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases},$$

stetig sind mit $g \circ f = id_Q$ und $f \circ g = id_K$, d.h. f und g sind Homöomorphismen.

20 a) Es sei $X := \prod_{i\in I} X_i$ und $\mathcal{B} := \{\prod_{i\in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_i$ für alle $i \in I\}$. Nach Satz 2.3 genügt es, die Eigenschaften (B_1) und (B_2) nachzuweisen. Wie unmittelbar aus der Definition des Produktes von Mengen folgt, gilt für eine beliebige Indexmenge J und für beliebige $U_i^{(j)} \subset X_i$ für alle $j \in J$ und $i \in I$ die folgende Rechenregel:

$$\bigcap_{j\in J}\prod_{i\in I} U_i^{(j)} \;=\; \prod_{i\in I}\bigcap_{j\in J} U_i^{(j)}$$

Denn:

$$\begin{aligned} g \in \bigcap_{j\in J}\prod_{i\in I} U_i^{(j)} \subset \prod_{i\in I} X_i \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, j \in J\colon g \in \{f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \mid \forall\, i \in I\colon f(i) \in U_i^{(j)}\} \\ &\Leftrightarrow \quad g : I \to \bigcup_{i\in I} X_i \quad \text{mit} \quad \forall i \in I\colon g(i) \in \bigcap_{j\in j} U_i^{(j)} \\ &\Leftrightarrow \quad g \in \prod_{i\in I}\bigcap_{j\in J} U_i^{(j)} \;\subset\; \prod_{i\in I} X_i \end{aligned}$$

Damit folgt:

(B_1) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$, da $X = \prod_{i\in I} X_i \in \mathcal{B}$

(B_2) $B, B' \in \mathcal{B} \;\Rightarrow\; B \cap B'$ ist Vereinigung von zu $\mathcal{B}$ gehörigen Mengen, denn:

Für $B = \prod_{i\in I} U_i$ und $B' = \prod_{i\in I} U_i'$ gilt:

$$B \cap B' \;=\; \prod_{i\in I} U_i \,\cap\, \prod_{i\in I} U_i' \;=\; \prod_{i\in I} \underbrace{U_i \cap U_i'}_{\in \mathcal{T}_i} \;\in\; \mathcal{B}$$

b) Ist I eine endliche Indexmenge, so ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Produkttopologie, wie in der Bemerkung nach der Definition der Produkttopologie erwähnt.

c) Ist I eine unendliche Indexmenge und $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume, die jeder mindestens zwei Punkte besitzen und mit der diskreten Topologie versehen sind, so ist die Box-Topologie die diskrete Topologie auf dem Produktraum, wohingegen die Produkttopologie verschieden von der diskreten Topologie ist.

sawo