Musterlösung zu Blatt 6 (Topologie I, SS 03)

21 Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $G(f) = \{(x,y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subset X \times Y$ der Graph von f und $g : X \to G(f)$ die Abbildung $x \mapsto (x, f(x))$ für $x \in X$.

Behauptung: f stetig $\Leftrightarrow$ g Homöomorphismus

Beweis:

„$\Leftarrow$“:

Nach Satz 3.6 sind die Projektionen $p_1 : X \times Y \to X$ und $p_2 : X \times Y \to Y$ stetig, und nach Satz 3.3 ist die Inklusion $i : G(f) \hookrightarrow X \times Y$ stetig. Also ist auch $f = p_2 \circ i \circ g$ stetig.

„$\Rightarrow$“:

Betrachte zunächst die Abbildung $\widetilde{g} : X \to X \times Y$ mit $\widetilde{g}(x) := (x, f(x))$ für $x \in X$. Wegen der universellen Eigenschaft der Produkttopologie ist $\widetilde{g}$ genau dann stetig, wenn $p_1 \circ \widetilde{g}$ und $p_2 \circ \widetilde{g}$ stetig sind. Letzteres ist der Fall, da $p_1 \circ \widetilde{g} = id_X$ und $p_2 \circ \widetilde{g} = f$ gilt. Wegen der universellen Eigenschaft der Unterraumtopologie (als Initialtopologie) ist dann auch g stetig, da $i \circ g = \widetilde{g}$ stetig ist.

Definiere $h : G(f) \to X$ durch $h := p_1|_{G(f)}$. Dann gilt für alle $x \in X$

$$h \circ g(x) \;=\; h(x, f(x)) \;=\; p_1(x, f(x)) \;=\; x\,,$$

d.h. $h \circ g = id_X$, und für alle $(x, f(x)) \in G(f)$

$$g \circ h(x, f(x)) \;= g(p_1(x, f(x))) \;=\; g(x) \;=\; (x, f(x))\,,$$

d.h. $g \circ h = id_{G(f)}$. Also ist h die Umkehrabbildung zu g, d.h. g ist bijektiv. Da h zudem als Einschränkung von p_1 stetig ist, ist g ein Homöomorphismus.

22 a) **Behauptung:** $\overset{\circ}{\widehat{A \times B}} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$

Beweis:

„$\supset$“: $\overset{\circ}{A} \subset A, \overset{\circ}{B} \subset B$ und $\overset{\circ}{A}, \overset{\circ}{B}$ offen

$\Rightarrow$ $\overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B} \subset A \times B$ und $\overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$ offen

$\Rightarrow$ $\overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \times B}} \subset A \times B$

„$\subset$“: $(x,y) \in \overset{\circ}{\widehat{A \times B}}$

$\Rightarrow$ $\exists U \subset A$ offen, $V \subset Y$ offen: $(x,y) \in U \times V \subset \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$ (endl. Produkt)

b) **Behauptung:** $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

Beweis:

1. Möglichkeit:

„$\subset$“: $A \subset \overline{A}, B \subset \overline{B}$ und $\overline{A}, \overline{B}$ abgeschlossen

$\Rightarrow$ $A \times B \subset \overline{A} \times \overline{B}$ und $\overline{A} \times \overline{B}$ abgeschlossen

$\Rightarrow$ $A \times B \subset \overline{A \times B} \subset \overline{A} \times \overline{B}$

„$\supset$“: Sei $(x,y) \in \overline{A} \times \overline{B}$ beliebig.

Sei $U \in \mathcal{U}((x,y))$ beliebig.

$\Rightarrow$ $\exists U_1 \in \mathcal{U}(x), U_2 \in \mathcal{U}(y) : U_1 \times U_2 \subset U$

$U_1 \cap A \neq \emptyset, U_2 \cap B \neq \emptyset$ (da $x \in \overline{A}, y \in \overline{B}$)

$\Rightarrow$ $(U_1 \times U_2) \cap (A \times B) \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ $U \cap (A \times B) \neq \emptyset$

Also ist $(x,y) \in \overline{A \times B}$.

2. Möglichkeit: mit Teil a) durch Betrachtung der Komplemente

c) **Behauptung:** $Rd(A \times B) = (Rd(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times Rd(B))$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
Rd(A \times B) &= \overline{A \times B} \setminus \overset{\circ}{\widehat{A \times B}} \\
&= (\overline{A} \times \overline{B}) \setminus (\mathring{A} \times \mathring{B}) \quad \text{(nach a) und b))} \\
&= (\overline{A} \times \overline{B}) \cap \{(x,y) \in X \times Y \mid x \notin \mathring{A} \ \vee \ y \notin \mathring{B}\} \\
&= (\overline{A} \times \overline{B}) \cap \Big(\{(x,y) \in X \times Y \mid x \notin \mathring{A}\} \cup \{(x,y) \in X \times Y \mid y \notin \mathring{B}\} \Big) \\
&= \Big((\overline{A} \times \overline{B}) \cap \{(x,y) \in X \times Y \mid x \notin \mathring{A}\} \Big) \cup \Big((\overline{A} \times \overline{B}) \cap \{(x,y) \in X \times Y \mid y \notin \mathring{B}\} \Big) \\
&= \{(x,y) \in X \times Y \mid x \in Rd(A) \wedge y \in \overline{B}\} \cup \{(x,y) \in X \times Y \mid x \in \overline{A} \wedge y \in Rd(B)\} \\
&= (Rd(A) \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times Rd(B))
\end{aligned}
$$

23 a) Ist $f : X \to Y$ stetig, surjektiv und offen, dann trägt Y die Finaltopologie bzgl f, denn:

1. Möglichkeit:

völlig analog zum Beweis von Satz 3.11 für den Fall „f abgeschlossen“

2. Möglichkeit:

Die Behauptung ist nach Satz 3.10 äquivalent zu der Aussage:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& Z
\end{tikzcd}
$$

Für jede Abbildung $g : Y \to Z$ gilt:

$g \circ f$ stetig $\Leftrightarrow$ g stetig

Da f stetig ist, ist die Richtung „$\Leftarrow$“ klar. Um „$\Rightarrow$“ zu zeigen, betrachte eine beliebige offene Teilmenge $U \subset Z$. Da $g \circ f$ stetig ist, ist $(g \circ f)^{-1}(U)$ ebenfalls offen, und wegen der Surjektivität von f gilt:

$$f((g \circ f)^{-1}(U))) \;=\; f(f^{-1}(g^{-1}(U))) \;=\; g^{-1}(U)$$

Da f offen ist, ist die Menge $g^{-1}(U)$ also offen, d.h. g ist stetig.

b) f **nicht stetig:**

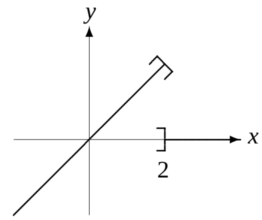
Aus der Definition der Finaltopologie folgt unmittelbar, daß die Stetigkeit von f eine notwendige Voraussetzung ist. Dies folgt aber auch aus der äquivalenten Formulierung aus Teil a), indem die Abbildung $g = id_Y : Y \longrightarrow Y$ betrachtet wird.

f nicht surjektiv:

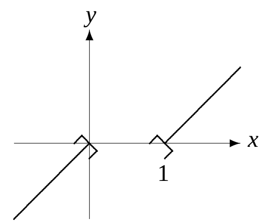
$$\begin{tikzcd}]0,1[\arrow[r, hook, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

f sei die Inklusionsabbildung, die sicherlich stetig und offen aber nicht surjektiv ist. g sei definiert durch:

$$g(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \leq 2 \\ 0 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$



g ist offensichtlich nicht stetig, aber wegen $g|_{]0,1[} = id_{]0,1[}$ ist $g \circ f = f$ stetig.



f nicht offen:

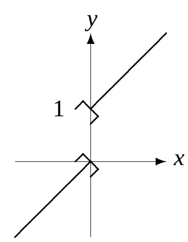
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\setminus]0,1] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \leq 0 \\ x-1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

ist stetig und bijektiv aber nicht offen, denn $]-1,0]$ ist offen in $\mathbb{R}\setminus]0,1]$, aber $f(]-1,0]) =]-1,0]$ ist nicht offen in $\mathbb{R}$.

Die Abbildung

$$g(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \leq 0 \\ x+1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$



ist offensichtlich nicht stetig, aber

$$\begin{aligned} g\circ f \ : \ \mathbb{R}\setminus]0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

ist stetig.

24 Es sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige, surjektive Abbildung, und Y trage die Quotiententopologie bzgl. f, d.h. es gilt:

$$O \subset Y \text{ offen } \Leftrightarrow f^{-1}(O) \subset X \text{ offen}$$

Desweiteren sei $Z = U \cap V$ mit $U \subset Y$ offen und $V \subset Y$ abgeschlossen. Dann trägt Z die Quotiententopologie bzgl. $f|_{f^{-1}(Z)} : f^{-1}(Z) \longrightarrow Z$, d.h. es gilt:

$$O \subset Z \text{ offen } \Leftrightarrow f^{-1}(O) \subset f^{-1}(Z) \text{ offen}$$

1) Betrachte zunächst $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \longrightarrow U$.

Zeige: $O \subset U$ offen $\Leftrightarrow f^{-1}(O) \subset f^{-1}(U)$ offen

„$\Rightarrow$“: $O \subset U$ offen, d.h. $\exists \widetilde{O} \subset Y$ offen: $O = \widetilde{O} \cap U$

$\Rightarrow$ O offen in Y

$\Rightarrow$ $f^{-1}(O)$ offen in X (da f stetig)

$\Rightarrow$ $f^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap f^{-1}(U)$ offen in $f^{-1}(U)$

„$\Leftarrow$“: $f^{-1}(O) \subset f^{-1}(U)$ offen, d.h. $\exists \widetilde{O} \subset X$ offen: $f^{-1}(O) = \widetilde{O} \cap f^{-1}(U)$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(O)$ offen in X (da $f^{-1}(U)$ offen in X)

$\Rightarrow$ O offen in Y (da Y Quotiententopologie bzgl. f trägt)

$\Rightarrow$ $O = O \cap U$ offen in U

Also trägt U die Quotiententopologie bzgl. $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \to U$.

2) Betrachte $f|_{f^{-1}(V)} : f^{-1}(V) \to V$.

Zeige: $A \subset V$ abgeschlossen $\Leftrightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(V)$ abgeschlossen

Beweis: völlig analog zu Teil 1) mit „abgeschlossen“ anstelle von „offen“

Also trägt V die Quotiententopologie bzgl. $f|_{f^{-1}(V)} : f^{-1}(V) \to V$.

3) Betrachte nun $f|_{f^{-1}(Z)} : f^{-1}(Z) \to Z$.

Nach Teil 1) trägt U die Quotiententopologie bzgl. $f|_{f^{-1}(U)}$. Eine typische abgeschlossene Menge in U ist von der Form $U \cap V$ mit $V \subset Y$ abgeschlossen, und nach Teil 2) trägt somit die Menge $Z = U \cap V$ die Quotiententopologie bzgl. $f|_{f^{-1}(Z)}$.

sawo