Prof. Dr. D. Erle
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

7. Übungsblatt zu „Topologie I“, SS 2003

Abgabetermin: Montag, 16.6.03, bis 14.15 Uhr in den Kästen

Aufgabe 25: Auf $\mathbb{R}^n$ wird durch

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Z}^n$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Sei $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ der Einheitskreis. Zeigen Sie, daß der Quotientenraum $\mathbb{R}^n/_\sim$ zu dem Produktraum $S^1 \times \ldots \times S^1$ (n Faktoren) homöomorph ist.

Aufgabe 26: Betrachten Sie $X := \mathbb{R}^n \times \{0\}$ und $Y := \mathbb{R}^n \times \{1\}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. Eine Abbildung $f : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \{0\} \to Y$ sei definiert durch

$$f(x, 0) := \left(\frac{x}{\|x\|^2} \, , \, 1 \right) \, ,$$

wobei $\| \cdot \|$ die euklidische Norm bezeichne. Zeigen Sie, daß $X \cup_f Y$ homöomorph zu S^n ist.

Aufgabe 27: Betrachten Sie den $\mathbb{R}^{n^2}$ als Menge $M(n, \mathbb{R})$ der $n \times n$–Matrizen mit reellen Einträgen, die mit der euklidischen Topologie versehen sei. Es seien

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{R}) &:= \{M \in M(n, \mathbb{R}) \mid M \text{ invertierbar}\} \\ O(n, \mathbb{R}) &:= \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid {}^tM = M^{-1}\} \end{aligned}$$

jeweils versehen mit der Unterraumtopologie. Zeigen Sie:

a) $GL(n, \mathbb{R})$ ist offen in $M(n, \mathbb{R})$.

b) $O(n, \mathbb{R})$ ist abgeschlossen in $M(n, \mathbb{R})$.

c) $O(n, \mathbb{R})$ ist nicht zusammenhängend.