Musterlösung zu Blatt 7 (Topologie I, SS 03)

25 Auf $\mathbb{R}^n$ wird durch

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; x - y \in \mathbb{Z}^n$$

eine Äquivalenzrelation definiert. Es bezeichne $\mathbb{R}^n/_\sim$ den zugehörigen Quotientenraum (mit der Quotiententopologie versehen) und $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ den Einheitskreis (mit der Unterraumtopologie der euklidischen Topologie versehen).

Behauptung: $\mathbb{R}^n/_\sim \approx S^1 \times \ldots \times S^1$ (n Faktoren)

Beweis: Definiere $h : \mathbb{R}^n/_\sim \to S^1 \times \ldots \times S^1$ durch:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "h\circ\pi"'] & \mathbb{R}^n/_\sim \arrow[d, "h"] \\ & S^1 \times \ldots \times S^1 \end{tikzcd} \qquad h([(x_1,\ldots,x_n)]) := \begin{pmatrix} (\cos(2\pi x_1), \sin(2\pi x_1)) \\ \vdots \\ (\cos(2\pi x_n), \sin(2\pi x_n)) \end{pmatrix}$$

***h* wohldefiniert und injektiv:**

$$\begin{aligned} & [(x_1,\ldots,x_n)] = [(y_1,\ldots,y_n)] \\ \Leftrightarrow\;& (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n) \in \mathbb{Z}^n \\ \Leftrightarrow\;& (x_1,\ldots,x_n) = (y_1 + k_1, \ldots, y_n + k_n) \text{ mit } k_i \in \mathbb{Z} \text{ für } i = 1,\ldots,n \\ \Leftrightarrow\;& h([x_1,\ldots,x_n)]) = \begin{pmatrix} (\cos(2\pi(y_1+k_1)), \sin(2\pi(y_1+k_1))) \\ \vdots \\ (\cos(2\pi(y_n+k_n)), \sin(2\pi(y_n+k_n)) \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} (\cos(2\pi y_1), \sin(2\pi y_1)) \\ \vdots \\ (\cos(2\pi y_n), \sin(2\pi y_n)) \end{pmatrix} = h([(y_1,\ldots,y_n)]) \end{aligned}$$

***h* surjektiv:** ✓

***h* stetig:**

folgt mit der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie aus der Stetigkeit von $h \circ \pi$

***h* offen:**

Betrachte zunächst den Fall $n = 1$, d.h. $h : \mathbb{R}/_\sim \to S^1$, $[x] \mapsto (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$.
Nach Definition der Quotiententopologie gilt:

$$\mathcal{O} \subset \mathbb{R}/_\sim \text{ offen} \;\Leftrightarrow\; \pi^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R} \text{ offen}$$

Zeige: $h \circ \pi$ offen ($\Rightarrow h$ offen, da $h(\mathcal{O}) = (h \circ \pi \circ \pi^{-1})(\mathcal{O})$ wegen π surjektiv)

Es genügt, die Offenheit von $h \circ \pi$ auf einer Basis der Topologie von $\mathbb{R}$ nachzuweisen.

Betrachte also $B(x_0,r) = \,]\,x_0 - r, x_0 + r\,[\,$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ beliebig.

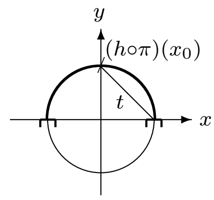
1. Fall: $r > \frac{1}{2}$

$\Rightarrow\ (h \circ \pi)(B(x_0,r)) = S^1$ offen

2. Fall: $r \leq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow\ (h \circ \pi)(B(x_0,r)) = B((h \circ \pi)(x_0), t) \cap S^1$ offen

mit $t := \|(h \circ \pi)(x_0 - r) - (h \circ \pi)(x_0)\|_2$



Ist $n \geq 2$ beliebig, so läßt sich der Nachweis der Offenheit auf den Fall $n = 1$ zurückführen, da als Basiselemente der Produkttopologie die Produkte der obigen Basiselemente von S^1 gewählt werden können und da gilt:

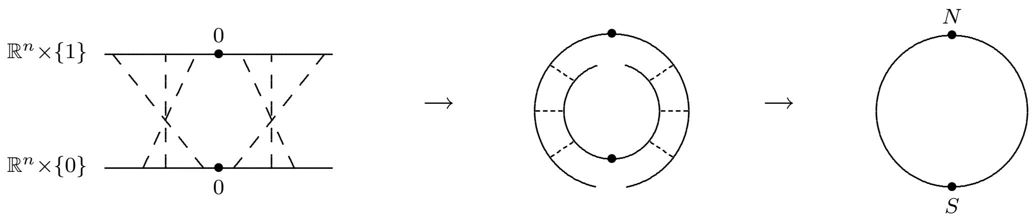
$$\mathcal{O}_1 \times \ldots \times \mathcal{O}_n \subset S^1 \times \ldots S^1 \text{ offen } \Leftrightarrow \mathcal{O}_i \subset S^1 \text{ offen für alle } i \in \{1, \ldots, n\}$$

26 Es seien $X := \mathbb{R}^n \times \{0\}$, $Y := \mathbb{R}^n \times \{1\}$ Teilmengen von $\mathbb{R}^{n+1}$ und eine Abbildung $f : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \{0\} \to Y$ definiert durch

$$f(x,0) := \left(\frac{x}{\|x\|^2}\,,\,1 \right) ,$$

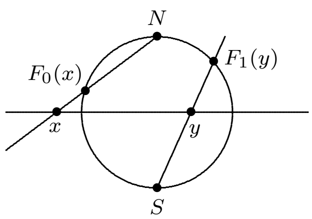
wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm bezeichne.

Behauptung: $X \cup_f Y \approx S^n$



Beweis:

Es werden Abbildungen $F_0, F_1 : \mathbb{R}^n \times \{0\} \to S^n$ als Umkehrabbildungen der stereographischen Projektionen $S^n \backslash \{N\} \to \mathbb{R}^n \times \{0\}$ bzw. $S^n \backslash \{S\} \to \mathbb{R}^n \times \{0\}$ konstruiert, wobei mit $N := (0, \ldots, 0, 1)$ der Nordpol und mit $S := (0, \ldots, 0, -1)$ der Südpol der n-Sphäre S^n bezeichnet werde.



Zu $x = (x_1, \ldots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ suche also $t \in \,]\,0, 2\,]$, so daß $F_0(x) := N + t(x - N)$ die Bedingung $\|F_0(x)\| = 1$ erfüllt:

$$\begin{aligned}
& \|F_0(x)\|^2 = t^2 x_1^2 + \ldots + t^2 x_n^2 + (1-t)^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & t^2\|x\|^2 + 1 - 2t + t^2 = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & t^2(\|x\|^2 + 1) - 2t = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & t = 0 \text{ oder } t = \frac{2}{\|x\|^2 + 1}
\end{aligned}$$

Wegen $t \neq 0$ definiere also $F_0(x) := N + \dfrac{2}{\|x\|^2+1}(x - N)$. Für $y \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ wird entsprechend $F_1(y) := S + \underbrace{\frac{2}{\|y\|^2+1}}_{=:\,\widetilde{t}}(y - S)$ festgelegt, und damit:

$$\begin{tikzcd} X \dot{\cup} Y \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "F"'] & X \cup_f Y \arrow[d, "g"] \\ & S^n \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} F(x_1,\dots,x_n,i) &:= F_i(x_1,\dots,x_n,0) \\ g([(x_1,\dots,x_n,i)]) &:= F_i(x_1,\dots,x_n,0) \end{aligned} \qquad \text{für } i \in \{0,1\}$$

Nach Definition gilt also $F = g \circ p$.

g wohldefiniert

Ist $[(x,i)] = [(y,j)]$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $i,j \in \{0,1\}$, so gilt nach Definition der durch die Klebeabbildung f gegebenen Äquivalenzrelation:

$$\begin{aligned} & (x = y \ \wedge \ i = j) && \vee \ \left(\frac{x}{\|x\|^2} = \frac{y}{\|y\|^2} \ \wedge \ i = j = 0\right) \\ \vee \ & \left(x = \frac{y}{\|y\|^2} \ \wedge \ i = 1 \ \wedge \ j = 0\right) && \vee \ \left(y = \frac{x}{\|x\|^2} \ \wedge \ i = 0 \ \wedge \ j = 1\right) \end{aligned}$$

Da die Abbildung $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ injektiv ist, gilt für den zweiten wie für den ersten Fall $x = y$ und $i = j$, d.h. $g([(x,i)]) = g([(y,j)])$. Da die anderen beiden Fälle durch Vertauschung der Variablen x mit y und i mit j ineinander übergehen, betrachte o.B.d.A. den Fall $y = \frac{x}{\|x\|^2}$ und $i = 0$, $j = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & g([(y,1)]) \\ = \ & F_1(y,0) \ = \ (\widetilde{t}y_1,\dots,\widetilde{t}y_n,\widetilde{t}-1) \ \text{ mit } \widetilde{t} = \frac{2}{\|y\|^2+1} = \frac{2\|x\|^2}{1+\|x\|^2} = t\|x\|^2 \\ = \ & (t\|x\|^2\frac{x_1}{\|x\|^2},\dots,t\|x\|^2\frac{x_n}{\|x\|^2}, t\|x\|^2 - 1) \\ = \ & (tx_1,\dots,tx_n,\frac{2\|x\|^2}{1+\|x\|^2} - \frac{1+\|x\|^2}{1+\|x\|^2}) \\ = \ & (tx_1,\dots,tx_n,\frac{\|x\|^2-1}{1+\|x\|^2}) \\ = \ & (tx_1,\dots,tx_n,1-\frac{2}{1+\|x\|^2}) \\ = \ & (tx_1,\dots,tx_n,1-t) \\ = \ & F_0(x,0) \\ = \ & g([(x,0)]) \end{aligned}$$

g stetig:

Wegen der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie folgt die Stetigkeit von g aus der Stetigkeit von $g \circ p = F$, und F ist stetig, da die Einschränkungen von F

auf die Summanden der topologischen Summe $X \dot{\cup} Y$ den stetigen Abbildungen F_0 und F_1 entsprechen.

***g* injektiv:**

Es seien $[(x,i)], [(y,j)] \in X \cup_f Y$ beliebig mit $g([(x,i)]) = g([(y,j)])$.

1. Fall: $i = j$

Dann gilt

$$(tx_1, \ldots, tx_n, (-1)^i(1-t)) \;=\; (\widetilde{t}y_1, \ldots, \widetilde{t}y_n, (-1)^j(1-\widetilde{t}))$$

und somit $t = \widetilde{t}$, d.h. es ist entweder $t \neq 0$ und $x_i = y_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, also $[(x,i)] = [(y,j)]$, oder $t = 0$ und $[(x,i)] = [(y,j)] \in \{N, S\}$.

2. Fall: $i = 0$, $j = 1$ (oder umgekehrt)

Dann gilt

$$(tx_1, \ldots, tx_n, 1-t) \;=\; (\widetilde{t}y_1, \ldots, \widetilde{t}y_n, \widetilde{t}-1)$$

und somit $\widetilde{t} = 2-t$ und $tx_i = (2-t)y_i$ für alle i. Da wegen $g([(y,1)]) \in S^n \backslash \{S\}$ der Fall $t = 2$ ausgeschlossen ist, folgt

$$y_i \;=\; \frac{t}{2-t}x_i \;=\; \frac{\frac{2}{\|x\|^2+1}}{2-\frac{2}{\|x\|^2+1}}x_i \;=\; \frac{x_i}{\|x\|^2}$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, d.h. $y = \dfrac{x}{\|x\|^2}$ und somit $[(y,1)] = [(x,0)]$.

***g* surjektiv:**

Es sei $y \in S^n$ beliebig. Ist $y = N$, so gilt:

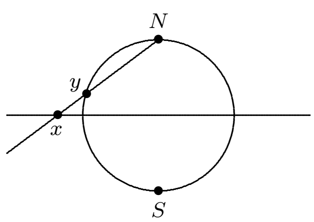
$$g([(0,1)]) \;=\; F_1(0, \ldots, 0, 0) \;=\; (0, \ldots, 0, 1) \;=\; y$$

Für $y \neq N$ ist $y_{n+1} < 1$, und für das gesuchte Urbild $x \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$ gilt:

$$x \;=\; N + s(y-N) \;=\; (sy_1, \ldots, sy_n, 1 + s(y_{n+1}-1)) \;\text{ mit }\; 1 + s(y_{n+1}-1) = 0$$

Somit gilt für $s := \dfrac{1}{1-y_{n+1}}$:

$$g([(sy_1, \ldots, sy_n, 0)]) \;=\; (y_1, \ldots, y_{n+1}) \;=\; y$$



***g* offen:**

Es genügt, die Offenheit von F nachzuweisen, denn wegen der Surjektivität von p gilt für eine offene Teilmenge $\mathcal{O} \subset X \cup_f Y$

$$g(\mathcal{O}) \;=\; (g \circ p \circ p^{-1})(\mathcal{O}) \;=\; (F \circ p^{-1})(\mathcal{O})\,,$$

und $p^{-1}(\mathcal{O})$ ist offen, da p stetig ist.

F_0 ist als Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ nach $S^n \backslash \{N\}$ ein Homöomorphismus, insbesondere also offen, und es ist auch $F_0 : \mathbb{R}^n \times \{0\} \to S^n$ offen, da $S^n \backslash \{N\}$ eine offene Teilmenge von S^n ist. Völlig analog läßt sich begründen, daß F_1 eine offene Abbildung ist. Nach Definition der topologischen Summe sind X und Y offene Unterräume von $X \dot\cup Y$, und daher folgt die Offenheit von F aus der Offenheit von F_0 und F_1.

Insgesamt: g ist ein Homöomorphismus.

27 Es seien

$$\begin{aligned} GL(n,\mathbb{R}) &:= \{M \in M(n,\mathbb{R}) \mid M \text{ invertierbar}\} \\ O(n,\mathbb{R}) &:= \{M \in GL(n,\mathbb{R}) \mid {}^tM = M^{-1}\} \end{aligned}$$

jeweils mit der Unterraumtopologie versehen.

a) Behauptung: $GL(n,\mathbb{R})$ offen in $M(n,\mathbb{R})$

Beweis:

Eine Matrix $M \in M(n,\mathbb{R})$ ist genau dann invertierbar, wenn $det(M) \neq 0$ gilt. Die Abbildung $det : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ist stetig, wie sich z.B. anhand der Leibniz-Formel sehen läßt, und daher ist $GL(n,\mathbb{R}) = det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ offen in $M(n,\mathbb{R})$.

b) Behauptung: $O(n,\mathbb{R})$ abgeschlossen in $M(n,\mathbb{R})$

Beweis:

Es gilt

$$O(n,\mathbb{R}) = \{M \in GL(n,\mathbb{R}) \mid {}^tMM = E\} = \{M \in M(n,\mathbb{R}) \mid {}^tMM = E\},$$

denn für $M \in M(n,\mathbb{R})$ mit ${}^tMM = E$ ist wegen

$$(det\, M)^2 = det({}^tMM) = det(E) = 1$$

$det(M) \in \{\pm 1\}$, insbesondere also $det(M) \neq 0$, d.h. $M \in GL(n,\mathbb{R})$. Da die Abbildung $f : M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R}), M \mapsto {}^tMM$ offensichtlich stetig ist (Identifikation von $M(n,\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$), ist $O(n,\mathbb{R}) = f^{-1}(\{E\})$ abgeschlossen in $M(n,\mathbb{R})$, da die einpunktige Menge $\{E\}$ abgeschlossen in $M(n,\mathbb{R})$ ist.

c) Behauptung: $O(n,\mathbb{R})$ nicht zusammenhängend

Beweis:

Wegen $E \in O(n,\mathbb{R})$ und $diag(-1,1,\ldots,1) \in O(n,\mathbb{R})$ ist nach dem in Teil b) Gezeigten $det(O(n,\mathbb{R})) = \{-1,1\}$, insbesondere also nicht zusammenhängend. Da die Abbildung det stetig ist, ist $O(n,\mathbb{R})$ somit ebenfalls nicht zusammenhängend.

sawo