Musterlösung zu Blatt 8 (Topologie I, SS 03)

28 a) **Behauptung:** $A, B \subset X$ abgeschlossen und $A \cap B$, $A \cup B$ zusammenhängend

$\Rightarrow$ A, B zusammenhängend

Beweis:

Annahme: $A = U \cup V$ mit $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ und U, V abgeschlossen in A

Da A abgeschlossen in X ist, sind U und V ebenfalls abgeschlossen in X. Es gilt

$$A \cap B \;=\; (U \cap B) \cup (V \cap B) \quad \text{mit } (U \cap B) \cap (V \cap B) = \emptyset\,,$$

wobei $U \cap B$ und $V \cap B$ abgeschlossen in $A \cap B$ sind. Da $A \cap B$ nach Voraussetzung zusammenhängend ist, ist $U \cap B = \emptyset$ oder $V \cap B = \emptyset$. Betrachte o.B.d.A. den Fall $U \cap B = \emptyset$. Dann gilt

$$A \cup B \;=\; U \cup (V \cup B) \quad \text{mit } U \cap (V \cup B) = \emptyset\,,$$

wobei U und $V \cup B$ beide nicht leer und abgeschlossen in $A \cup B$ sind, d.h. $A \cup B$ ist nicht zusammenhängend. **Widerspruch!**

Also ist A zusammenhängend, und analog läßt sich zeigen, daß auch B zusammenhängend ist.

b) Gegenbeispiel: Es sei $X := \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie versehen, und $A := \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $B := \{0\}$. Dann sind $A \cup B = \mathbb{R}$ und $A \cap B = \emptyset$ zwar zusammenhängend, aber $A = \,]-\infty, 0\,[\, \cup \,]\,0, \infty\,[$ ist nicht zusammenhängend.

29 Es sei $f : X \to Y$ eine surjektive, offene Abbildung und Y zusammenhängend.

Behauptung: $f^{-1}(y)$ zusammenhängend für alle $y \in Y$

$\Rightarrow$ X zusammenhängend

Beweis:

Annahme: $X = U \cup V$ mit $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ und U, V offen in X

Wegen der Surjektivität von f gilt:

$$Y \;=\; f(X) \;=\; f(U) \cup f(V)$$

Da f eine offene Abbildung ist, sind $f(U)$ und $f(V)$ beide offen in Y und nicht leer, und da Y zusammenhängend ist, folgt $f(U) \cap f(V) \neq \emptyset$. Sei also $y \in f(U) \cap f(V)$. Dann ist

$$f^{-1}(y) \;=\; (f^{-1}(y) \cap U) \cup (f^{-1}(y) \cap V) \quad \text{mit } (f^{-1}(y) \cap U) \cap (f^{-1}(y) \cap V) = \emptyset\,,$$

wobei $f^{-1}(y) \cap U$ und $f^{-1}(y) \cap V$ beide nicht leer und offen in $f^{-1}(y)$ sind, d.h. $f^{-1}(y)$ ist nicht zusammenhängend. **Widerspruch!**.

Also ist X zusammenhängend.

30 a) **Annahme:** $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ Homöomorphismus

Dann ist $h|_{]\,0,\infty\,[} : \,]\,0, \infty\,[\, \to \mathbb{R}\backslash\{h(0)\}$ eine stetige, bijektive Abbildung. Da $]\,0, \infty\,[$ zusammenhängend ist, folgt, daß auch $\mathbb{R}\backslash\{h(0)\} = \,]-\infty, h(0)\,[\, \cup \,]\,h(0), \infty\,[$ zusammenhängend ist. **Widerspruch!**

Also sind $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}_+$ nicht homöomorph.

b) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, das mehr als einen Punkt enthalte. Dann existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so daß $]\,a, b\,[\subset I$ gilt. Im folgenden sei o.B.d.A. $I = \,]\,a, b\,[$.

Annahme: $h : S^1 \to I$ Homöomorphismus

Es sei $c := \frac{a+b}{2}$. Dann ist $S^1 \setminus \{h^{-1}(c)\}$ wegzusammenhängend, denn für beliebige Punkte $x = (\cos(2\pi t_1), \sin(2\pi t_1)), y = (\cos(2\pi t_2)), \sin(2\pi t_2)) \in S^1 \setminus \{h^{-1}(c)\}$ definiert entweder

$$t \mapsto (\cos(2\pi((1-t) \cdot t_1 + t \cdot t_2)), \sin(2\pi((1-t) \cdot t_1 + t \cdot t_2)))$$

oder

$$t \mapsto (\cos(2\pi((t \cdot t_1 + (1-t) \cdot t_2)), \sin(2\pi(t \cdot t_1 + (1-t) \cdot t_2)))$$

für $t \in [0,1]$ einen Weg von x nach y, der ganz in $S^1 \setminus \{h^{-1}(c)\}$ liegt. Also ist $S^1 \setminus \{h^{-1}(c)\}$ auch zusammenhängend, und da h stetig ist, folgt, daß auch die Menge $h(S^1 \setminus \{h^{-1}(c)\}) = \,]\,a, c\,[\cup \,]\,c, b\,[$ zusammenhängend ist. **Widerspruch!**

Also sind S^1 und I nicht homöomorph.

31 a) Jede stetige Abbildung $f : [0,1] \to [0,1]$ hat einen Fixpunkt, denn:

Für die stetige Abbildung

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) - x \end{array}$$

gilt $g(0) = f(0) \geq 0$ und $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert daher ein $x \in [0,1]$ mit $g(x) = 0$, d.h. $f(x) = x$.

b) Zu jeder stetigen Abbildung $f : S^1 \to \mathbb{R}$ gibt es einen Punkt $x \in S^1$ mit $f(x) = f(-x)$, denn:

Für die stetige Abbildung

$$\begin{array}{rccc} g: & S^1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) - f(-x) \end{array}$$

und $x_0 \in S^1$ gilt $g(x_0) = -g(-x_0)$, d.h. es ist $g(x_0) \leq 0$ und $g(-x_0) \geq 0$ oder umgekehrt. Daher existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x \in S^1$ mit $g(x) = 0$, d.h. $f(x) = f(-x)$.

sawo