Musterlösung zu Blatt 9 (Topologie I, SS 03)

32 Es sei A eine Teilmenge des topologischen Raumes X und $c : [0,1] \to X$ eine stetige Abbildung mit $c(0) \in \overset{\circ}{A}$ und $c(1) \in X \setminus \overline{A}$.

Behauptung: $c([0,1]) \cap Rd(A) \neq \emptyset$

Beweis:

Annahme: $c([0,1]) \cap Rd(A) = \emptyset$

Dann gilt:

$$c([0,1]) \;=\; \underbrace{\left(c([0,1]) \cap \overset{\circ}{A}\right)}_{\text{offen in } c([0,1])} \,\dot{\cup}\, \underbrace{\left(c([0,1]) \cap \left(X \setminus \overline{A}\right)\right)}_{\text{offen in } c([0,1])}$$

Da $c([0,1])$ zusammenhängend (sogar wegzusammenhängend) ist, folgt:

$$c([0,1]) \cap \overset{\circ}{A} = \emptyset \quad \text{oder} \quad c([0,1]) \cap \left(X \setminus \overline{A}\right) \;=\; \emptyset$$

Aber es ist $c(0) \in \overset{\circ}{A}$ und $c(1) \in X \setminus \overline{A}$. **Widerspruch!**

33 Es sei $n > 1$ und $A \subset \mathbb{R}^n$ definiert durch:

$$A := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{zu jedem } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ existieren } r, j \in \mathbb{Z} \text{ mit } x_i = \frac{r}{2^j} \right\}$$

Behauptung: $\mathbb{R}^n \setminus A$ ist wegzusammenhängend

Beweis:

Es seien $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus A$ beliebig. Dann ist $x = (x_1, \ldots, x_n)$, und es existiert ein Index $i \in \{1, \ldots, n\}$, so daß $x_i \neq \frac{r}{2^j}$ für alle $r, j \in \mathbb{Z}$. Es sei o.B.d.A. $i = 1$. Ebenso ist $y = (y_1, \ldots, y_n)$, und es existiert ein Index $k \in \{1, \ldots, n\}$, so daß $y_k \neq \frac{r}{2^j}$ für alle $r, j \in \mathbb{Z}$.

1. Fall: $k \neq 1$

Definiere

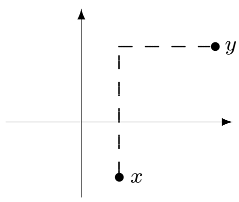
$$c(t) := (x_1, (1-t)x_2 + ty_2, \ldots, (1-t)x_n + ty_n) \in \mathbb{R}^n \setminus A \text{ für alle } t \in [0,1]\,,$$

d.h. c ist ein Weg in $\mathbb{R}^n \setminus A$ von $c(0) = x$ nach $c(1) = (x_1, y_2, \ldots, y_n)$. Definiere weiter

$$d(t) := ((1-t)x_1 + ty_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \setminus A \text{ für alle } t \in [0,1]\,,$$

d.h. d ist ein Weg in $\mathbb{R}^n \setminus A$ von $d(0) = (x_1, y_2, \ldots, y_n)$ nach $d(1) = y$. Die *Hintereinanderschaltung* $c * d$ der Wege c und d ist definiert durch:

$$(c * d)(t) := \begin{cases} c(2t) & \text{falls } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ d(2t-1) & \text{falls } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

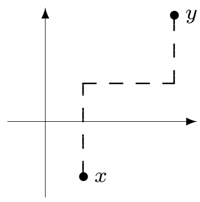


Dann ist $(c * d)(0) = c(0) = x$ und $(c * d)(1) = d(1) = y$, d.h. $c * d$ ist ein Weg von x nach y in $\mathbb{R}^n \backslash A$.

2. Fall: $k = 1$

Definiere die folgenden Wege:

$$\begin{aligned} c(t) &:= (x_1, (1-t)x_2 + tx_1, x_3, \ldots, x_n) \\ d(t) &:= ((1-t)x_1 + ty_1, x_1, (1-t)x_3 + ty_3, \ldots, (1-t)x_n + ty_n) \\ e(t) &:= (y_1, (1-t)x_1 + ty_2, y_3, \ldots, y_n) \end{aligned}$$



Dann ist die Hintereinanderschaltung $(c * d) * e$ ein Weg von x nach y in $\mathbb{R}^n \backslash A$.

34 A und B sind offensichtlich wegzusammenhängend und somit auch zusammenhängend. Desweiteren gilt:

$$\overline{A} \;=\; A \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

Wegen $A \subset A \cup B \subset \overline{A}$ ist $A \cup B$ nach Satz 4.2 zusammenhängend.

$A \cup B$ ist nicht wegzusammenhängend, denn:

Annahme: $\varphi : [0, 1] \to A \cup B$ Weg von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$

Es sei

$$t_0 \;:=\; \max\{t \in [0, 1] \mid \varphi(t) = (0, 0)\}$$

(Maximum wird angenommen, da φ stetig).

Annahme: es existiert ein $t_1 > t_0$ mit $\varphi(t_1) \notin B$

Dann ist $\varphi(t_1) \in A_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Da A_n eine Wegekomponente (= Zusammenhangskomponente) von $(A \cup B) \backslash \{(0, 0)\}$ ist, folgt $\varphi([t_1, 1]) \subset A_n$ und somit $\varphi(1) \notin B$. **Widerspruch!**

Also ist $\varphi(]t_0, 1]) \subset B$ und daher $\varphi([t_0, 1]) \subset \{(0, 0)\} \cup B$, d.h. es gilt

$$\varphi([t_0, 1]) \subset \{(0, 0)\} \quad \text{oder} \quad \varphi([t_0, 1]) \subset B$$

(da $\varphi([t_0, 1])$ wegzusammenhängend ist) **Widerspruch!**

Also existiert kein Weg von $(0, 0)$ nach $(1, 0)$.

35 i) Eine nicht leere Teilmenge von $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ist genau dann offen, wenn ihr Komplement abzählbar viele Elemente enthält. Daraus folgt, daß jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend ist, denn:

Annahme: $U \neq \emptyset$ nicht zusammenhängend

Dann existieren offene, nicht leere, disjunkte Teilmengen V, W von U mit $V \cup W = U$. Mit $U \cap (\mathbb{R} \backslash V) = W$ und $U \cap (\mathbb{R} \backslash W) = V$ folgt:

$$U \;=\; V \cup W \;=\; (U \cap (\mathbb{R} \backslash W)) \cup (U \cap (\mathbb{R} \backslash V)) \;=\; U \cap (\underbrace{(\mathbb{R} \backslash W)}_{\text{abzählbar}} \cup \underbrace{(\mathbb{R} \backslash V)}_{\text{abzählbar}})$$

Also ist U abzählbar und somit $\mathbb{R} \backslash U$ überabzählbar. **Widerspruch!**

Daraus ergibt sich unmittelbar, daß $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ zusammenhängend und lokal zusammenhängend ist.

ii) Jeder Weg in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ist konstant. Zeige dazu zunächst, daß eine stetige Abbildung $c : [0,1] \to (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ lokal konstant ist, d.h. es ist

zu zeigen: $\forall\, x \in [0,1]\ \exists\, \varepsilon_x > 0 \colon\ c(\,]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\,\cap [0,1]) = \{c(x)\}$

Sei also $x \in [0,1]$ beliebig. Definiere $B_x := [\mathbb{R} \setminus c([0,1] \cap \mathbb{Q})] \cup \{c(x)\}$. Dann ist $B_x \neq \emptyset$, da $c(x) \in B_x$, und B_x ist offen in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$, denn

$$\mathbb{R} \setminus B_x \;=\; c([0,1] \cap \mathbb{Q}) \cap (\mathbb{R} \setminus \{c(x)\}) \;\subset\; c([0,1] \cap \mathbb{Q})$$

ist abzählbar, da Bilder abzählbarer Menge abzählbar sind. Da c stetig ist, ist $c^{-1}(B_x)$ eine offene Umgebung von x in $[0,1]$, d.h. es existiert ein $\varepsilon_x > 0$ mit $]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\,\cap [0,1] \subset c^{-1}(B_x)$. Für jedes $q \in \mathbb{Q} \cap\,]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\,\cap [0,1]$ gilt nach Definition von B_x, daß $c(q) = c(x)$ ist. Ist nun $y \in\,]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\,\cap [0,1]$ beliebig, so existiert ein $\varepsilon_y > 0$ mit $c(]y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y[\,\cap [0,1] \cap \mathbb{Q}) = c(y)$. Desweiteren gibt es ein $q \in\,]y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y[\,\cap\,]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\,\cap [0,1] \cap \mathbb{Q}$, und es gilt $c(q) = c(x)$ und $c(q) = c(y)$. Daraus folgt $c(x) = c(y)$, d.h. c ist lokal konstant.

Aus der lokalen Konstantheit von c folgt die globale Konstantheit, denn:

Annahme: $c([0,1])$ besteht aus mehr als einem Punkt.

Es sei $x_0 \in c([0,1])$. Zu $x \in [0,1]$ bezeichne $A_x :=]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[$ die obige offene Umgebung von x, auf der c konstant ist. Definiere desweiteren:

$$A_1 \;:=\; \bigcup_{\substack{x \in [0,1] \text{ mit} \\ c(x) = c(x_0)}} A_x \qquad \text{und} \qquad A_2 \;:=\; \bigcup_{\substack{x \in [0,1] \text{ mit} \\ c(x) \neq c(x_0)}} A_x$$

Dann ist $A_1 \cup A_2 = [0,1]$ und $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Außerdem sind A_1 und A_2 beide offen und nach Annahme nicht leer. **Widerspruch!** ($[0,1]$ ist zusammenhängend)

Also ist jeder Weg in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ konstant. Daraus folgt unmittelbar, daß $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ nicht wegzusammenhängend ist und daß zu $x \in \mathbb{R}$ keine Umbegungsbasis aus wegzusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ existiert (d.h. $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ist nicht *lokal wegzusammenhängend*).

sawo