Prof. Dr. D. Erle
Dr. J. Sawollek

Fachbereich Mathematik
Universität Dortmund

10. Übungsblatt zu „Topologie I“, SS 2003

Abgabetermin: Montag, 7.7.03, bis 14.15 Uhr in den Kästen

Aufgabe 36: Es sei X ein topologischer Raum und $M \subset X$.

a) Beweisen Sie, daß M genau dann offen ist, wenn M zu jedem Filter auf X gehört, der gegen ein $x \in M$ konvergiert.

b) Sei $\Phi(x)$ die Menge aller Filter auf X, die gegen $x \in X$ konvergieren. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\mathcal{U}(x) = \bigcap_{\mathcal{F} \in \Phi(x)} \mathcal{F}$$

Aufgabe 37: Es seien X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ Filter auf X.

a) Beweisen Sie: Ist $\mathcal{F}'$ feiner als $\mathcal{F}$, so gilt:

$$\mathcal{F} \to x \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}' \to x$$

b) Beweisen Sie mit Hilfe von a) die Aussage: Ist $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine gegen $x \in X$ konvergente Folge in X, so konvergiert auch jede Teilfolge von $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ gegen x.

Aufgabe 38: Zeigen Sie, daß je zwei Ultrafilter auf einer Menge X gleichmächtig sind.

Aufgabe 39: Es sei X eine unendliche Menge und

$$\mathcal{T} := \{U \subset X \mid U = \emptyset \text{ oder } X \backslash U \text{ endlich}\}$$

die kofinite Topologie auf X.

a) Zeigen Sie, daß durch $\mathcal{F} := \mathcal{T} \backslash \{\emptyset\}$ ein Filter auf X definiert wird.

b) Bestimmen Sie die Menge der Berührungspunkte von $\mathcal{F}$.