Musterlösung zu Blatt 10 (Topologie I, SS 03)

36 a) Behauptung: M offen

$$\Leftrightarrow\ (\mathcal{F} \to x \in M \ \Rightarrow\ M \in \mathcal{F})$$

Beweis:

„$\Rightarrow$“: $\mathcal{F} \to x \in M$

$\Rightarrow\ \mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$

$\Rightarrow\ M \in \mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$ (da M offen)

„$\Leftarrow$“:

Zeige: $\forall\, x \in M \colon M \in \mathcal{U}(x)$

Sei $x \in M$ beliebig. Dann gilt $\mathcal{U}(x) \to x$.

$\Rightarrow\ M \in \mathcal{U}(x)$ (nach Voraussetzung)

b) Für $x \in X$ sei $\Phi(x) := \{\mathcal{F} \text{ Filter} \mid \mathcal{F} \to x\}$.

Behauptung: $\mathcal{U}(x) \ = \bigcap\limits_{\mathcal{F}\in\Phi(x)} \mathcal{F}$

Beweis:

„$\subset$“: $\mathcal{F} \in \Phi(x)$

$\Rightarrow\ \mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$

$\Rightarrow\ \mathcal{U}(x) \ \subset \bigcap\limits_{\mathcal{F}\in\Phi(x)} \mathcal{F}$

„$\supset$“: $\mathcal{U}(x) \in \Phi(x)$, da $\mathcal{U}(x) \to x$

37 a) Behauptung: Ist $\mathcal{F}'$ feiner als $\mathcal{F}$, so gilt: $\mathcal{F} \to x \ \Rightarrow\ \mathcal{F}' \to x$

Beweis:

Ist $\mathcal{F}'$ feiner als $\mathcal{F}$, d.h. $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$, und gilt $\mathcal{F} \to x$, d.h. $\mathcal{F} \supset \mathcal{U}(x)$, so folgt unmittelbar $\mathcal{F}' \supset \mathcal{U}(x)$, also $\mathcal{F}' \to x$.

b) Behauptung: $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ Folge in X mit $x_j \to x$

$$\Rightarrow\ x_{\varphi(j)} \to x \quad \forall\, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strikt monoton steigend}$$

Beweis:

$(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ erzeugt mit der Filterbasis $\{\{x_i \mid i \geq k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$ einen Filter $\mathcal{F}$, und es gilt $\mathcal{F} \to x$, denn:

$$\begin{aligned}
& x_j \to x \\
\Leftrightarrow\ & \forall\, U \in \mathcal{U}(x)\ \exists\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, i \geq k \colon x_i \in U \\
\Leftrightarrow\ & \forall\, U \in \mathcal{U}(x)\ \exists\, k \in \mathbb{N} \colon \{x_i \mid i \geq k\} \subset U \\
\Leftrightarrow\ & \forall\, U \in \mathcal{U}(x) \colon U \in \mathcal{F} \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F} \\
\Leftrightarrow\ & \mathcal{F} \to x
\end{aligned}$$

Ebenso erzeugt $(x_{\varphi(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ mit der Filterbasis $\{\{x_{\varphi(i)} \mid i \geq k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$ einen Filter $\mathcal{F}'$. $\mathcal{F}'$ ist feiner als $\mathcal{F}$, d.h. es gilt $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$, denn:

$$\begin{aligned} & U \in \mathcal{F} \\ \Rightarrow\ & \exists\, k \in \mathbb{N}:\ \{x_i \mid i \geq k\} \subset U \\ \Rightarrow\ & \{x_{\varphi(i)} \mid i \geq k\} \subset \{x_i \mid i \geq k\} \subset U \\ \Rightarrow\ & U \in \mathcal{F}' \end{aligned}$$

Mit Teil a) folgt $\mathcal{F}' \to x$ und somit $x_{\varphi(i)} \to x$.

38 1. Möglichkeit:

$\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ seien zwei Ultrafilter auf X. Definiere Abbildungen $f_1 : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1$ und $f_2 : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ durch

$$f_i(A) := \begin{cases} A & \text{falls } A \in \mathcal{F}_i \\ X \backslash A & \text{falls } A \notin \mathcal{F}_i \end{cases}$$

für $i \in \{1, 2\}$. Da $\mathcal{F}_i$ ein Ultrafilter ist, ist f_i wohldefiniert, denn nach Satz 5.8 gilt für $A \subset X$ immer $A \in \mathcal{F}_i$ oder $X \backslash A \in \mathcal{F}_i$. Es ist $f_1 \circ f_2 = id_{\mathcal{F}_1}$, denn für $A \in \mathcal{F}_1$ gilt:

1. Fall: $A \in \mathcal{F}_2$

Dann ist $f_1(f_2(A)) = f_1(A) = A$.

2. Fall: $A \notin \mathcal{F}_2$

Dann ist $f_1(f_2(A)) = f_1(X \setminus A) = X \setminus (X \setminus A) = A$, da aus $A \in \mathcal{F}_1$ mit den Filteraxiomen $X \backslash A \notin \mathcal{F}_1$ folgt.

Völlig analog läßt sich $f_2 \circ f_1 = id_{\mathcal{F}_2}$ zeigen, d.h. f_1 und f_2 sind bijektiv und somit $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ gleichmächtig.

2. Möglichkeit:

Definiere auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ eine Relation $\sim$ durch:

$$A \sim B \quad :\Leftrightarrow \quad A = B \ \vee\ A = X \backslash B$$

$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation, denn:

$\sim$ reflexiv: ✓

$\sim$ symmetrisch: ✓

$\sim$ transitiv:
$$\begin{aligned} & A \sim B \ \wedge\ B \sim C \\ \Rightarrow\ & (A = B \ \vee\ A = X \backslash B) \ \wedge\ (B = C \ \vee\ B = X \backslash C) \\ \Rightarrow\ & A = C \ \vee\ A = X \backslash C \\ \Rightarrow\ & A \sim C \end{aligned}$$

Bezeichnet $\pi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)/_{\sim}$ die kanonische Projektionsabbildung, so ist die Einschränkung $\pi|_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(X)/_{\sim}$ für jeden Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X bijektiv, denn:

$\pi|_{\mathcal{F}}$ injektiv:

Sind $A, B \in \mathcal{F}$ mit $\pi(A) = \pi(B)$, so gilt $A \sim B$, d.h. es ist entweder $A = B$ oder $A = X \backslash B$. Letztere Möglichkeit ist aber ausgeschlossen, da nach den Filteraxiomen nicht gleichzeitig $B \in \mathcal{F}$ und $X \backslash B \in \mathcal{F}$ gelten kann. Also ist $A = B$.

$\pi|_{\mathcal{F}}$ surjektiv:

Es sei $[A] \in \mathcal{P}(X)/_{\sim}$ beliebig. Nach Satz 5.8 ist dann $A \in \mathcal{F}$ oder $X \backslash A \in \mathcal{F}$, und daher besitzt $[A] = [X \backslash A]$ bezüglich der Abbildung π ein Urbild in $\mathcal{F}$.

Somit ist gezeigt, daß jeder Ultrafilter auf X die gleiche Mächtigkeit wie die Menge $\mathcal{P}(X)/_{\sim}$ hat. Insbesondere sind je zwei solche Ultrafilter gleichmächtig.

39 a) $\mathcal{F}$ ist ein Filter auf X, denn:

(F_1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ nach Definition und $X \in \mathcal{F}$, da $X \backslash X = \emptyset$ endlich

(F_2) $F, F' \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; X \backslash (F \cap F') = \underbrace{(X \backslash F)}_{\text{endlich}} \cup \underbrace{(X \backslash F')}_{\text{endlich}}$ endlich und $F \cap F' \neq \emptyset$, da X unendlich, d.h. $F \cap F' \in \mathcal{F}$

(F_3) $F \in \mathcal{F}$, $F \subset F' \;\Rightarrow\; X \backslash F' \subset X \backslash F$ endlich, d.h. $F' \in \mathcal{F}$

b) Für jedes $F \in \mathcal{F}$ gilt $\overline{F} = X$, denn $\overline{F}$ ist abgeschlossen, d.h. $X \backslash \overline{F}$ ist offen und somit $X \backslash (X \backslash \overline{F}) = \overline{F}$ endlich (im Widerspruch zu F unendlich, da $X \backslash F$ endlich) oder $X \backslash \overline{F} = \emptyset$. Damit folgt, daß die Menge der Berührungspunkte von $\mathcal{F}$ gegeben ist durch:

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \;=\; X$$

sawo