Musterlösung zu Blatt 11 (Topologie I, SS 03)

40 **Behauptung:** Jeder endliche T_1–Raum trägt die diskrete Topologie.

Beweis:

1. Möglichkeit:

Es sei $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ein endlicher T_1–Raum, wobei ohne Einschränkung $n \geq 2$ sei (sonst ist die Behauptung klar). Es sei $x_i \in X$ beliebig. Da X ein T_1–Raum ist, existiert zu jedem $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $j \neq i$ eine Umgebung $U_j \in \mathcal{U}(x_i)$, so daß $x_j \notin U_j$. Dann ist auch der endliche Schnitt

$$\bigcap_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} U_j \; = \; \{x_i\} \in \mathcal{U}(x_i)\,,$$

d.h. $\{x_i\}$ ist offen in X. Somit sind sämtliche einelementigen Teilmengen von X offen, und daher trägt X die diskrete Topologie.

2. Möglichkeit:

$X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ist genau dann ein T_1–Raum, wenn $\{x_i\}$ abgeschlossen ist für alle $i \in \{1, \dots, n\}$. Da sich jede Teilmenge von X als endliche Vereinigung einpunktiger Mengen darstellen läßt, ist sie abgeschlossen. Dann ist aber auch jede Teilmenge von X offen, d.h. X trägt die diskrete Topologie.

41 **Behauptung:** Jeder metrische Raum (X, d) ist normal.

Beweis:

***X* ist T_1–Raum:**

Seien $x, y \in X$ beliebig mit $x \neq y$. Dann ist $d(x, y) > 0$, und somit ist der offene Ball $B(x, d(x, y))$ eine Umgebung von x, die y nicht enthält.

***X* ist T_4–Raum:**

Es seien $A, B \subset X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, und es sei o.B.d.A. $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ (sonst ist die Behauptung klar). Für $a \in A$ ist wegen $a \notin B$ und der Abgeschlossenheit von B

$$d(a, B) = \inf\{d(a, b) \mid b \in B\} > 0$$

(andernfalls enthielte jede Umgebung von a ein Element aus B, d.h. $a \in \overline{B} = B$), und daher ist $U_a := B(a, \frac{d(a,B)}{2})$ eine Umgebung von a. Entsprechend ist für $b \in B$ eine Umgebung durch $V_b := B(b, \frac{d(b,A)}{2})$ gegeben, und desweiteren ist

$$U := \bigcup_{a \in A} U_a \text{ Umgebung von } A \text{ und } V := \bigcup_{b \in B} V_b \text{ Umgebung von } B.$$

Annahme: $U \cap V \neq \emptyset$

Es sei $x \in U \cap V$. Dann existiert ein $a \in A$ mit $x \in U_a$ und ein $b \in B$ mit $x \in V_b$, und es gilt:

$$\begin{aligned} d(a,b) &\overset{(\Delta)}{\leq} d(a,x) + d(x,b) \\ &< \frac{d(a,B)}{2} + \frac{d(b,A)}{2} \\ &\leq \frac{d(a,b)}{2} + \frac{d(b,a)}{2} \quad = \quad d(a,b) \qquad \textbf{Widerspruch!} \end{aligned}$$

Also ist $U \cap V = \emptyset$, d.h. U und V trennen A und B.

42 Es sei $X := \mathbb{R}$ zusammen mit der Topologie, deren Subbasis aus allen offenen Intervallen in $\mathbb{R}$ und der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gebildet wird. Eine Basis der Topologie ist gegeben durch:

$$\{\,]\,a,b\,[\mid a,b \in \mathbb{R} \text{ mit } a < b\} \cup \{\,]\,c,d\,[\cap \mathbb{Q} \mid c,d \in \mathbb{R} \text{ mit } c < d\}$$

(Beachte dabei: Die Menge $\mathbb{Q}$ läßt sich mit obiger Basis als Vereinigung von Elementen der Form $]\,c,d\,[\cap \mathbb{Q}$ darstellen.)

***X* ist ein T_2–Raum:**

Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die hier betrachtete Topologie feiner als die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ ist, d.h. zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ können die gleichen trennenden Umgebungen gewählt werden wie bezüglich der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$.

***X* ist kein T_3–Raum:**

$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist abgeschlossen, da $\mathbb{Q}$ (als Subbasiselement) offen ist. Ist U eine Umgebung von $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, so existiert zu jedem $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ein $r_x > 0$, so daß $]\,x - r_x, x + r_x\,[\subset U$ gilt. Ist V eine Umgebung von 0, so existiert ein $r > 0$, so daß $]-r, r\,[\cap \mathbb{Q} \subset V$ gilt. Dann ist aber $U \cap V \neq \emptyset$, denn es existiert ein $x_0 \in\,]-r, r\,[\cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, und es gilt $U \cap V \supset\,]\,x_0 - r_{x_0}, x_0 + r_{x_0}\,[\cap\,]-r, r\,[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

***X* ist kein T_4–Raum:**

klar wegen „$T_4 \wedge T_1 \Rightarrow T_3 \wedge T_1$“

43 Es seien X und Y topologische Räume, $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ stetige Abbildungen mit $f \circ g = id_Y$.

a) **Behauptung:** X hausdorffsch $\Rightarrow$ Y hausdorffsch

Beweis:

Es seien $x, y \in Y$ beliebig mit $x \neq y$. Wegen $f \circ g = id_Y$ ist g injektiv und somit $g(x) \neq g(y)$. Da X hausdorffsch ist, existieren (offene) Umgebungen $U \in \mathcal{U}(g(x))$ und $V \in \mathcal{U}(g(y))$ mit $U \cap V = \emptyset$. Wegen der Stetigkeit von g sind $g^{-1}(U)$ und $g^{-1}(V)$ (offene) Umgebungen von x bzw. y mit $g^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) = g^{-1}(U \cap V) = \emptyset$.

b) ***Y* endlich:**

Es sei X eine Menge, die aus mindestens zwei Punkten bestehe und mit der trivialen Topologie versehen sei, und es sei $Y := \{y_0\}$ ein einpunktiger Raum. Wähle $x_0 \in X$

beliebig, und definiere:

$$f: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & y_0 \end{array} \qquad \text{und} \qquad g: \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ y_0 & \longmapsto & x_0 \end{array}$$

Dann sind f und g beide stetig mit $f \circ g = id_Y$, und Y ist hausdorffsch, X jedoch nicht.

Y nicht endlich:

Es sei $X := (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup_h (\mathbb{R} \times \{1\})$ mit der folgenden Klebeabbildung:

$$h: \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \{0\} & \longrightarrow & (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \{1\} \\ (x,0) & \longmapsto & (x,1) \end{array}$$

Dann ist X nicht hausdorffsch (siehe Vorlesung bzw. die Lösung von Aufgabe 8 b) auf Blatt 2). Desweiteren sei $Y := \mathbb{R}$ mit der Standardtopologie versehen, d.h. Y ist insbesondere ein Hausdorffraum. Definiere nun:

$$f: \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ [(x,i)] & \longmapsto & x \end{array} \qquad \text{und} \qquad g: \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & [(x,0)] \end{array}$$

f ist wohldefiniert, da aus $[(x,i)] = [(y,j)]$ stets $x = y$ folgt.

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R} \times \{0\}) \dot\cup (\mathbb{R} \times \{1\}) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "(x,i) \mapsto x"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Desweiteren ist f wegen der universellen Eigenschaft der Quotiententopologie stetig, da die Abbildungen $(x,i) \mapsto x$ für $i \in \{0,1\}$ stetig sind, wobei in dem nebenstehenden Diagramm π die kanonische Projektionsabbildung bezeichnet.

g ist als Komposition der stetigen Abbildungen $x \mapsto (x,0)$ und $(x,0) \mapsto [(x,0)]$ ebenfalls stetig, und es gilt offensichtlich $f \circ g = id_Y$.

sawo