

12. Übungsblatt zu „Topologie I“, SS 2003

Abgabetermin: Montag, 21.7.03, bis 14.15 Uhr in den Kästen

Aufgabe 44: Es sei X eine beliebige Menge. Bestimmen Sie die grösste Topologie auf X , welche die Trennungseigenschaft T_1 besitzt.

Aufgabe 45: Auf \mathbb{R} mit der Standardtopologie werden die folgenden Äquivalenzrelationen definiert:

$$\text{a) } x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x = y \vee (x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q}) \vee (x \notin \mathbb{Q} \wedge y \notin \mathbb{Q})$$

$$\text{b) } x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x = y \vee (x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q})$$

Untersuchen Sie jeweils, welche Trennungseigenschaften der Quotientenraum \mathbb{R}/\sim besitzt.

Aufgabe 46: Sei A eine abgeschlossene Teilmenge eines T_4 -Raumes X und $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung mit $\|f(x)\| < 1$ für alle $x \in A$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm von \mathbb{R}^n bezeichnet. Zeigen Sie, daß es eine stetige Abbildung $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt mit $F|_A = f$ und $\|F(x)\| < 1$ für alle $x \in X$.

Hinweis: Benutzen Sie den Tietze-Erweiterungssatz und Urysohns Lemma.

Aufgabe 47: Es sei $X := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ mit der Topologie aus Aufgabe 10 versehen, d.h. eine Basis der Topologie ist durch Teilmengen $\mathcal{O}_{a,b}$ und \mathcal{O}_c der Form

$$\mathcal{O}_{a,b} = \{(x, 0) \in X \mid x \in]a, b[\}$$

$$\text{und } \mathcal{O}_c = \{(x, 0) \in X \mid x \in]-c, 0[\cup]0, c[\} \cup \{(0, 1)\}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß der Raum (X, \mathcal{T}) zwar lokal-euklidisch ist, jedoch keine topologische Mannigfaltigkeit.

Leistungsnachweis:

Zum Erwerb eines Leistungsnachweises oder eines qualifizierten Studiennachweises zur Vorlesung *Topologie I* wird eine dreistündige Klausur angeboten. Diese findet am

Montag, 11.8.2003, 10⁰⁰ – 13⁰⁰ Uhr in Raum 511

statt. Die Teilnahme an der Klausur erfordert eine Anmeldung bis zum **1.8.2003** in der Übungsgruppe oder bei Jörg Sawollek (R. 913, Tel. 3443). Zur Klausur sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.