Musterlösung zu Blatt 12 (Topologie I, SS 03)

44 Für einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ gilt:

$$\begin{aligned} & (X,\mathcal{T}) \text{ ist } T_1\text{–Raum} \\ \Leftrightarrow\quad & \{x\} \text{ abgeschlossen für alle } x \in X \\ \Leftrightarrow\quad & X\setminus\{x\} \in \mathcal{T} \text{ für alle } x \in X \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} & \mathcal{T} \text{ ist gröbste } T_1\text{–Topologie auf } X \\ \Leftrightarrow\quad & \mathcal{T} \text{ besitzt Subbasis } \mathcal{S} = \{X\setminus\{x\} \mid x \in X\} \\ \Leftrightarrow\quad & \mathcal{T} \text{ besitzt Basis } \mathcal{B} = \{X\setminus E \mid E \subset X,\ E \text{ endlich}\} \\ \Leftrightarrow\quad & \mathcal{T} = \{X\setminus E \mid E \subset X,\ E \text{ endlich}\} \cup \{\emptyset\} \\ \Leftrightarrow\quad & \mathcal{T} \text{ ist die kofinite Topologie auf } X \end{aligned}$$

45 a) Definiere eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ durch

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x = y \ \vee\ (x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{Q}) \ \vee\ (x \notin \mathbb{Q} \wedge y \notin \mathbb{Q}),$$

und bezeichne die zugehörige Projektionsabbildung mit $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/_\sim$. Dann ist $\mathbb{R}/_\sim = \{[0], [\sqrt{2}]\}$ mit der trivialen Topologie versehen, denn:

1. Möglichkeit:

Ist $U \subset \mathbb{R}/_\sim$ offen mit $[0] \in U$, so ist $\pi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ offen mit $0 \in \pi^{-1}(U)$. Da die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}$ von den offenen Intervallen erzeugt wird, existiert ein $r > 0$, so daß $]-r, r[\ \subset \pi^{-1}(U)$ ist, und da dieses Intervall auch irrationale Zahlen enthält, folgt $[\sqrt{2}] \in U$. Völlig analog folgt für $U \subset \mathbb{R}/_\sim$ offen mit $[\sqrt{2}] \in U$, daß auch $[0] \in U$ ist, d.h. jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}/_\sim$, die nicht leer ist, ist identisch mit $\mathbb{R}/_\sim$.

2. Möglichkeit:

$\{[0]\}$ ist nicht offen in $\mathbb{R}/_\sim$, da $\pi^{-1}(\{[0]\}) = \mathbb{Q}$ nicht offen in $\mathbb{R}$ ist, und $\{[\sqrt{2}]\}$ ist nicht offen in $\mathbb{R}/_\sim$, da $\pi^{-1}(\{[\sqrt{2}]\}) = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nicht offen in $\mathbb{R}$ ist. Also sind $\emptyset$ und $\mathbb{R}/_\sim$ die einzigen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}/_\sim$.

Die unten aufgeführten Trennungseigenschaften von $\mathbb{R}/_\sim$ gelten für jeden topologischen Raum, der mindestens zwei verschiedene Punkte besitzt und mit der trivialen Topologie versehen ist.

$\mathbb{R}/_\sim$ ist kein T_1–Raum:

Es ist $[0] \neq [\sqrt{2}]$, und wegen $\mathcal{U}([0]) = \{\mathbb{R}/_\sim\}$ gibt es keine Umgebung von $[0]$, die $[\sqrt{2}]$ nicht enthält.

$\mathbb{R}/_\sim$ ist kein T_2–Raum:

klar wegen „$T_2 \Rightarrow T_1$“

$\mathbb{R}/_{\sim}$ **ist ein T_{3a}–Raum:**

Ist $A \subset \mathbb{R}/_{\sim}$ abgeschlossen und $x \in \mathbb{R}/_{\sim}$ mit $x \notin A$, so ist $A = \emptyset$, d.h. die konstante Abbildung $f : \mathbb{R}/_{\sim} \to [0,1]$, $x \mapsto 1$, hat die im T_{3a}–Axiom geforderten Eigenschaften: $f(x) = 1$ und $f(A) = \emptyset \subset \{0\}$.

$\mathbb{R}/_{\sim}$ **ist ein T_3–Raum:**

klar wegen „$T_{3a} \Rightarrow T_3$“

$\mathbb{R}/_{\sim}$ **ist ein T_4–Raum:**

Sind $A \subset \mathbb{R}/_{\sim}$ und $B \subset \mathbb{R}/_{\sim}$ beide abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, so ist $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$. Betrachte ohne Einschränkung den Fall $A = \emptyset$. Dann sind $U := \emptyset$ und $V := \mathbb{R}/_{\sim}$ offene Umgebungen von A bzw. B mit $U \cap V = \emptyset$.

b) Definiere eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ durch

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x = y \ \vee \ (x \in \mathbb{Q} \ \wedge \ y \in \mathbb{Q})\,,$$

und bezeichne die zugehörige Projektionsabbildung mit $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/_{\sim}$. Dann gilt $\mathbb{R}/_{\sim} = \{[0]\} \cup \{\, [x] \mid x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \,\}$. Ist $U \subset \mathbb{R}/_{\sim}$ offen mit $U \neq \emptyset$, dann existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so daß $]\,a, b\,[\,\subset \pi^{-1}(U)$ und damit $[0] \in U$ gilt. Die einelementigen Mengen $\{[x]\}$ mit $x \notin \mathbb{Q}$ sind abgeschlossen in $\mathbb{R}/_{\sim}$, denn es ist $\pi^{-1}(\{[x]\}) = \{x\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}/_{\sim}$ **ist kein T_1–Raum:**

Es ist $[\sqrt{2}] \neq [0]$. Für $U \in \mathcal{U}([\sqrt{2}])$ gilt $[0] \in U$, d.h. es existiert keine Umgebung von $[\sqrt{2}]$, die $[0]$ nicht enthält.

$\mathbb{R}/_{\sim}$ **ist kein T_2–Raum:**

klar wegen „$T_2 \Rightarrow T_1$“

$\mathbb{R}/_{\sim}$ **ist kein T_3–Raum:**

$A := \{[\sqrt{2}]\}$ ist abgeschlossen in $\mathbb{R}/_{\sim}$ mit $[0] \notin A$. Für $U \in \mathcal{U}(A)$ gilt $[0] \in U$, d.h. es gibt keine Umgebung von A, die $[0]$ nicht enthält.

$\mathbb{R}/_{\sim}$ **ist kein T_{3a}–Raum:**

klar wegen „$T_{3a} \Rightarrow T_3$“

$\mathbb{R}/_{\sim}$ **ist kein T_4–Raum:**

$A := \{[\sqrt{2}]\}$ und $B := \{[\sqrt{3}]\}$ sind beide abgeschlossen in $\mathbb{R}/_{\sim}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Für $U \in \mathcal{U}(A)$ und $V \in \mathcal{U}(B)$ gilt $[0] \in U \cap V$, d.h. es gibt keine trennenden Umgebungen von A und B.

46 Es sei X ein T_4–Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $\|f(x)\| < 1$ für alle $x \in A$.

Behauptung: $\exists\, F : X \to \mathbb{R}^n$ stetig: $F|_A = f$ und $\|F(x)\| < 1 \ \ \forall\, x \in X$

Beweis: Es ist $f = (f_1, \ldots, f_n)$ mit $f_i : A \to \mathbb{R}$, und wegen $\|f(x)\| < 1$ für alle $x \in A$ ist $|f_i(x)| < 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $x \in A$, d.h. $\mathit{Bild}(f_i) \subset \,]-1, 1\,[$ für alle

$i \in \{1, \ldots, n\}$. Nach Satz 6.9 (Tietze–Erweiterungssatz) existieren für $i = 1, \ldots, n$ stetige Abbildungen $\widetilde{F}_i : X \to \mathbb{R}$ mit $\widetilde{F}_i|_A = f_i$, und ebenso ist die Abbildung $\widetilde{F} := (\widetilde{F}_1, \ldots, \widetilde{F}_n) : X \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $\widetilde{F}|_A = f$.

Da $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$, stetig ist, ist auch die Komposition $\varphi \circ \widetilde{F} : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $\mathcal{O} := (\varphi \circ \widetilde{F})^{-1}(\,]-1, 1[\,)$ offen in X mit $A \subset \mathcal{O}$, und $B := X \setminus \mathcal{O}$ ist abgeschlossen in X mit $A \cap B = \emptyset$. Nach Satz 6.8 (Urysohns Lemma) existiert eine stetige Abbildung $G : X \to [0, 1]$ mit $G(A) \subset \{1\}$ und $G(B) \subset \{0\}$.

Definiere nun $F : X \to \mathbb{R}^n$ durch $F(x) := (G(x)\widetilde{F}_1(x), \ldots, G(x)\widetilde{F}_n(x))$ für alle $x \in X$. Dann ist F stetig mit $F|_A = \widetilde{F}|_A = f$, und es ist $\|F(x)\| = |G(x)| \cdot \|\widetilde{F}(x)\| < 1$ für alle $x \in X$, denn für $x \in B$ ist $G(x) = 0$, und für $x \in X \setminus B = \mathcal{O}$ ist $\|\widetilde{F}(x)\| < 1$ und $|G(x)| \leq 1$.

47 Es sei $X := \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 1)\} \subset \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{T}$ die Topologie auf X, die durch Basiselemente $\mathcal{O}_{a,b}$ und $\mathcal{O}_c$ der folgenden Form erzeugt wird:

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}_{a,b} = \{(x, 0) \in X \mid x \in \,]a, b[\,\} \\ \text{und} \quad &\mathcal{O}_c = \{(x, 0) \in X \mid x \in \,]-c, 0[\, \cup \,]0, c[\,\} \cup \{(0, 1)\} \end{aligned}$$

$(X, \mathcal{T})$ ist lokal-euklidisch, denn die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} X \setminus \{(0,1)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x, 0) & \mapsto & x \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} X \setminus \{(0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ (x, i) & \mapsto & x \end{array}$$

sind offensichtlich Homöomorphismen. $(X, \mathcal{T})$ ist aber keine topologische Mannigfaltigkeit, da das T_2–Axiom nicht erfüllt ist, denn die Punkte $(0, 0)$ und $(0, 1)$ lassen sich nicht durch Umgebungen trennen (siehe Lösung zu Aufgabe 10 b) von Blatt 3).

sawo