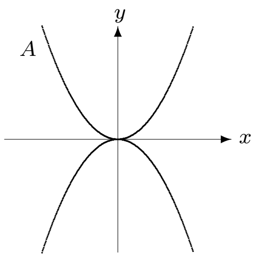
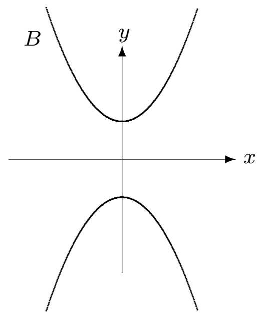
Musterlösung zu Blatt 13 (Topologie I, SS 03)

48 a) $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - x^4 = 0\}$ und $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 - (x^2+1)^2 = 0\}$ sind als Unterräume von $\mathbb{R}^2$ beide hausdorffsch und besitzen eine abzählbare Basis.

$y^2 - x^4 = 0$
$\Leftrightarrow \quad y = \pm x^2$





$y^2 - (x^2+1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow \quad y = \pm(x^2+1)$

***A* ist nicht lokal-euklidisch:**

Annahme: A lokal-euklidisch in $(0,0)$

Es sei U eine Umgebung von $(0,0)$ in A. U kann ohne Einschränkung so gewählt werden, daß ein Homöomorphismus $\varphi : U \to B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(0,0) = x$ existiert (Denn: Ist $\varphi : \widetilde{U} \to V \subset \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus mit $\varphi(0,0) =: x$, so existiert ein $r > 0$, so daß $B(x,r) \subset V$. Wähle $U := \varphi^{-1}(B(x,r))$.). Da $\mathbb{R}^2$ durch Herausnahme der x-Achse und der y-Achse in vier Zusammenhangskomponenten zerfällt, zerfällt auch $U \setminus \{(0,0)\}$ in mindestens vier Zusammenhangskomponenten (es sind sogar genau vier). $B(x,r) \setminus x$ dagegen ist zusammenhängend, falls $n \geq 2$ ist, und besteht aus genau zwei Zusammenhangskomponenten, falls $n = 1$ ist. **Widerspruch!**

Also ist A nicht lokal-euklidisch.

***B* ist lokal-euklidisch:**

Die Abbildungen

$$\begin{array}{rccc} \varphi_+ : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (x, x^2+1) \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rccc} \varphi_- : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (x, -(x^2+1)) \end{array}$$

sind Homöomorphismen auf ihre Bilder.

b) $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{M \in M(n,\mathbb{R}) \mid Spur(M) = 0\}$ ist als Teilraum von $\mathbb{R}^{n^2}$ hausdorffsch mit abzählbarer Basis der Topologie. Um zu zeigen, daß $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ lokal-euklidisch ist, untersuche zunächst die Stelle $\mathbb{O} \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ (Nullmatrix). Die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} Spur : & M(n,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ & (a_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}} & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{array}$$

ist stetig differenzierbar mit $Spur(\mathbb{O}) = 0$, und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial a_{11}} Spur(\mathbb{O}) = \frac{d}{dt}(t \mapsto Spur(diag(t,0,\ldots,0)) = t)\Big|_{t=0} = 1 \neq 0$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen ist daher eine Umgebung von $\mathbb{O}$ in $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^{n^2-1}$ (siehe Vorlesung).

Für $A \in \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ ist $B \mapsto A+B$ ein Homöomorphismus von $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ auf sich, der $\mathbb{O}$ auf A abbildet. Somit besitzt auch A eine Umgebung, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^{n^2-1}$ ist, d.h. $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R})$ ist eine topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n^2-1.

49 Es seien K, Y topologische Räume, K quasikompakt und $p : K \times Y \to Y$ die Projektion. Dann ist p abgeschlossen, denn:

Sei $A \subset K \times Y$ abgeschlossen.

Zeige: $Y \setminus p(A)$ offen in Y

Es sei $y_0 \in Y \setminus p(A)$ beliebig. Dann ist $(x, y_0) \in (K \times Y) \setminus A$ für alle $x \in K$. Da die Mengen der Form $U \times V$ mit $U \subset K$ offen und $V \subset Y$ offen eine Basis der Produkttopologie bilden und $(K \times Y) \setminus A$ offen ist, existieren zu jedem $x \in K$ offene Mengen $U_x \subset K$ und $V_x \subset Y$ mit $(x, y_0) \in U_x \times V_x \subset (K \times Y) \setminus A$. $(U_x)_{x \in K}$ ist eine offene Überdeckung des quasikompakten Raums K, und somit existieren $x_1, \dots, x_n \in K$, so daß $\bigcup\limits_{j=1}^{n} U_{x_j} = K$ gilt. $V_0 := \bigcap\limits_{j=1}^{n} V_{x_j}$ ist eine offene Umgebung von y_0 mit $V_0 \subset Y \setminus p(A)$, denn ist $y \in V_0$ beliebig, so gibt es zu jedem $x \in K$ ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $x \in U_{x_j}$ und $(x, y) \in U_{x_j} \times V_0 \subset U_{x_j} \times V_{x_j} \subset (K \times Y) \setminus A$, d.h. es ist $p^{-1}(y) \subset (K \times Y) \setminus A$ und somit $y \notin p(A)$.

Also ist $p(A)$ abgeschlossen in Y, d.h. p ist eine abgeschlossene Abbildung.

50 Nach Aufgabe 1 wird auf dem Vektorraum M aller Folgen reeller Zahlen mit konvergenter Quadratsumme durch $\|(x_n)\|_2 := \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2}$ eine Norm definiert. Es sei $A := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M \mid \|(x_n)\|_2 = 1\}$.

A ist zwar beschränkt und abgeschlossen in M, aber nicht kompakt, denn:

Annahme: A kompakt

Definiere eine Folge $(a^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ in M durch $a^{(i)} := (a^i_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit

$$a^i_j := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases}$$

für $i, j \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\|a^{(i)}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (a^i_j)^2} = 1,$$

d.h. $a^{(i)} \in A$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

1. Möglichkeit:

Nach dem Korollar zu Satz 7.1 besitzt jede Folge in einem quasikompakten Raum einen Häufungspunkt. Sei also $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ein Häufungspunkt von $(a^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$. Dann enthält jede Umgebung von $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$, und insbesondere enthält der offene Ball $B((b_j)_{j \in \mathbb{N}}, \frac{1}{2})$ unendlich viele Folgeglieder. Für beliebige Elemente

$a^{(i)}, a^{(k)} \in B((b_j)_{j\in\mathbb{N}}, \frac{1}{2})$ mit $i \neq k$ gilt jedoch:

$$\sqrt{2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}(a_j^i - a_j^k)^2} = \|a^{(i)} - a^{(k)}\|_2 \leq \|a^{(i)} - (b_j)\|_2 + \|(b_j) - a^{(k)}\|_2$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \qquad \textbf{Widerspruch!}$$

2. Möglichkeit:

Da M ein normierter – insbesondere also ein metrischer – Raum ist, ist A nach Satz 7.19 folgenkompakt, d.h. jede Folge in A besitzt eine konvergente Teilfolge. Wegen

$$\|a^{(i)} - a^{(k)}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}(a_j^i - a_j^k)^2} = \sqrt{2}$$

für $i \neq k$ gibt es keine Teilfolge von $(a^{(i)})_{i\in\mathbb{N}}$, die konvergiert (und somit eine Cauchy-Folge ist). **Widerspruch!**

3. Möglichkeit:

Betrachte die offene Überdeckung von A, die durch die Mengen $B(a, \frac{1}{2}) \cap A$ mit $a \in A$ gegeben ist. Wegen $\|a^{(i)} - a^{(k)}\|_2 = \sqrt{2}$ für $i \neq k$ (siehe 2. Möglichkeit) enthält jede der Mengen höchstens ein Element $a^{(i)}$, und somit besitzt die zugehörige Überdeckung keine endliche Teilüberdeckung. **Widerspruch!**

Also ist A nicht kompakt.

51 Es sei $f : S^1 \to D^2$ bijektiv.

Annahme: f stetig

Da S^1 (quasi-)kompakt und D^2 hausdorffsch ist, folgt aus dem Korollar zu Satz 7.9, daß f ein Homöomorphismus ist. Aber $S^1 \setminus \{(1,0),(-1,0)\}$ zerfällt in zwei Zusammenhangskomponenten und $D^2 \setminus \{f(1,0), f(-1,0)\}$ ist zusammenhängend, da wegzusammenhängend. **Widerspruch!**

Also kann f nicht stetig sein.

sawo