Universität Dortmund
Institut für Analysis
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 23. April 2003

Analysis II

1. Übungsblatt, SS 2003

Abgabe bis Montag, 28. April 2003, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 $\star$

Für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sei $\|x\| = 2|x_1| + \frac{1}{2}|x_2|$.

a) Zeigen Sie, dass $\|.\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Berechnen und skizzieren Sie die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$.

c) Es sei $|\,.\,|$ die Euklidnorm. Bestimmen Sie $a, b > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$a|x| \leq \|x\| \leq b|x|$$

Aufgabe 2 *(Metrik des französischen Eisenbahnsystems)*

Es sei $|\,.\,|$ die Euklidnorm. Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ sei $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$d(x,y) = \begin{cases} |x-y| & \text{falls } x \text{ und } y \text{ auf einer Geraden durch 0 liegen.} \\ |x| + |y| & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist. (Machen Sie sich bei der Dreiecksungleichung die verschiedenen Fälle graphisch klar.)

b) Berechnen und skizzieren Sie jeweils für $r = \frac{1}{2}$ und $r = 2$ die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, (1,0)) < r\}.$$

Aufgabe 3 $\star$

Es seien $a_n, b_n \geq 0$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ konvergent. Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert.

Hinweis: Betrachten Sie die Partialsumme.

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss03/index.php`