UNIVERSITÄT DORTMUND
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dortmund, 5. Mai 2003

Analysis II

3. Übungsblatt, SS 2003

Abgabe bis Montag, 12. Mai 2003, 14.00 Uhr, in die Kästen im Foyer.

Aufgabe 1 $\star$

Es seien A, B nichtleere, kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) Es existieren $a \in A$ und $b \in B$ mit $|a - b| = \operatorname{dist}(A, B)$.

b) Es existieren $x, y \in A$ mit $|x - y| = \operatorname{diam} A$.

Bleibt die Aussage in a) richtig, wenn eine der beiden Mengen nur abgeschlossen ist bzw. wenn beide Mengen nur abgeschlossen sind?

Aufgabe 2

Es seien f, g in $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen mit $|f'(x)| \leq k < 1, |g'(x)| \leq k$ für $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + f(y) &= a \\ y + g(x) &= b \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie, ob für die nachfolgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) \qquad \lim_{y\to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

existieren, und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

a) $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2 + (x-y)^2}$ b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ c) $f(x,y) = \dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$

Aufgabe 4 $\star$

a) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit:

i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(e^y - 1)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$ ii) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{y} & ,y \neq 0 \\ x & ,y = 0 \end{cases}$

b) Für welche $\alpha > 0$ läßt sich $g(x) = \dfrac{x_1 x_2 \dots x_n}{|x|^\alpha}$ $(x \in \mathbb{R}^n,\ x \neq 0)$ in 0 stetig fortsetzen?

Übungsblätter und Informationen zur Vorlesung und Übung finden Sie unter
`http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsix/uebungen/ana/ss03/index.php`